Discussion Paper Series

Graduate School and School of Economics

Meisei University

Discussion Paper Series, No.21
2012 年 3 月

ヴィクセル型取引ネットワークにおける エッジワース競争の分析 ※

星野良明
(香川大学)
石川竜一郎
(筑波大学)
山崎昭
(明星大学)

Hodokubo 2-1-1, Hino, Tokyo 191-8506
School of Economics, Meisei University

Phone: +81-(0)42-591-9479 Fax: +81-(0)42-599-3024
URL: http://keizai.meisei-u.ac.jp/econ/
E-mail: keizai@econ.meisei-u.ac.jp

※ 本稿の内容は科学研究費補助金基盤研究(C)・課題番号 22530188「市場経済における情報および取引ネットワークの理論的経済制度分析」による研究の一部である。

ヴィクセル型取引ネットワークにおける
エッジワース競争の分析

星野良明
(香川大学経済学部)
石川竜一郎
(筑波大学システム情報工学研究科)
山崎　昭
(明星大学経済学部・大学院経済学研究科)

2012 年 3 月

概 要

本稿の目的は、資産や財の移転（トランスファー）に関するヴィクセルの三角形型モデルを用いて、エッジワース流のゲームのコア概念によって表現された取引者間の競争が、最終的なトランスファーの結果にどのような影響を与えるのか分析することである。

第 2 節において、資産あるいは財のトランスファーを明示的に示す形の基本形を提示する。本稿ではこれを基本的トランスファー・モデルとよぶ。このモデルは、異なる 3 種類の資産あるいは財と、異なる 3 人の取引主体から構成される。各取引主体は一般均衡モデルにおける標準的な経済構成員と同様に、効用関数と初期保有ベクトルによって表現される。基本的トランスファー・モデルにおいては、取引主体間の競争といっても、実質的には三人の間の話し合いの結果がいかなる配分になるかということに等しいため、コア・トランスファーとなるトランスファーの範囲は非常に広いものとなる。そこで続く第 3 節以降では、順次、各取引主体の競争相手として、異なる 3 人の主体とそれぞれ全く同じ特徴を持つ「コピー」を増やすときに、取引主体間の競争が最終的なトランスファーの結果にどのような影響を与えるかをコア概念を用いて検証する。

本稿においては、特徴ある経済主体の具体例を用いて分析を進めることから、取引主体間の競争がトランスファーの結果に及ぼす影響を具体的な形で示すができる．まず第 2 節では、基本的トランスファー・モデルにおいてトランスファーがコア・トランスファーとなる必要・十分条件 (命題 2.2) を明らかにした。次に第 3 節では、基本的トランスファー・モデルに取引主体 2 の競争相手を一人導入した競争的なモデルを分析し、命題 3.2 においてコア・トランスファーの必要・十分条件を明らかにした。さらに第 4 節では、基本的トランスファー・モデルに取引主体 2 の競争相手に加えて取引主体 3 の競争相手も導入して、より競争的なモデルを分析した。三人の主体のうち二人それぞれに競争相手が一人いるこのモデルでは、競争がさらに増して、特定の主体が取引から大きなレントを得ることは難しくなる。

1　イントロダクション

財の市場取引において取引者間に「欲望の偶然的一致 (Double coincidence of wants)」が見られない限り、取引が成立するには困難をともない、そのため取引の決済手段として貨幣

が生まれ、経済社会において幅広く用いられるようになったことは周知の事実である。こうした経済現象を説明するために、K. ヴィクセルは三人の経済主体からなる簡単な状況を考え、それぞれの経済主体が欲する財を保有する主体は各自が所有する財を特に欲しない状況下で、決済手段の存在が三者間でそれぞれの厚生を高める取引の成立を可能にすると議論した。

ヴィクセルの議論は近年になって Kiyotaki and Wright (1990) によりサーチ・モデルを用いた厳密な定式化と議論展開が与えられた。

また、Fujiki, Green and Yamazaki (2008) においては、 リスクを伴う資産あるいは財のトランスファーを「ヴィクセルの三角形」型のモデルにより分析し、それらの移転に伴うリスクの最適な負担分担の在り方が、リスクに関して情報を持つ取引主体の情報を開示する誘因両立性との関連で分析された。

本稿では、ヴィクセルの三角形型のモデルを用いて、資産や財の取引移転にかかわる競争が、いかなる資産や財の移転に結実するかを分析することを目的としている。

つぎの第 2 節において、資産あるいは財の移転（トランスファー）を明示的に示す形の基本形を提示して、これを本稿における**基本的トランスファー・モデル**とよぶ。基本的トランスファー・モデルは、異なる 3 種類の資産あるいは財と、異なる 3 人の取引主体から構成される。各取引主体は一般均衡モデルにおける標準的な経済構成員と同様に、効用関数と初期保有ベクトルによって表現される。

基本的トランスファー・モデルにおいては、異なる主体間での取引に関する競争は極めて限定的であることから、競争から生まれてくるトランスファーの結果は、例えば取引主体間の交渉力というようなモデル外の多くの要因に依存する。そこで続く第 3 節以降では、順次、各取引主体の競争相手として、異なる 3 人の主体とそれぞれ全く同じ特徴を持つ「コピー」を増やすときに、取引主体間の競争が最終的なトランスファーの結果にどのような影響を与えるかをコア概念を用いて検証することにしたい。本稿においては、特徴ある経済主体の具体例を用いて分析を進めることから、取引主体間の競争がトランスファーの結果に及ぼす影響を具体的な形で示すことを目標としている。

また、標準的な一般均衡モデルにおいては、各主体の取引は抽象的な市場において行われるため、取引主体間の取引は描写されない。本稿のモデルでは、取引主体間の取引が主体間の資産あるいは財のトランスファーとして描写される点が標準的な一般均衡モデルと相違しており、その意味で本稿のモデルは一般均衡モデルにおける市場取引のミクロの取引構造を描写する試みの一つと解釈される。

2　資産や財の移転に関するヴィクセル型モデル

2.1　競争が存在しない場合の基本的トランスファー・モデル

三種類の資産あるいは財を考え、その非負の組み合わせを $c = (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3_+$ とする。また、三人の取引主体を考え、その集合を $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ とする。各取引主体 $i \in \mathbb{N}$ の効用

は、消費 (ベクトル)$c=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3_+$ に対して

$$
\begin{aligned}
u_1(c)&=c_1+2c_3\\
u_2(c)&=c_2+2c_1\\
u_3(c)&=c_3+2c_2
\end{aligned}
$$

で与えられるものとし、各取引主体 $i\in\mathbb{N}$ の初期保有量ベクトル e_i はそれぞれ、$e_1=(1,0,0), e_2=(0,1,0), e_3=(0,0,1)$ で与えられるものとする。

$\mathbb{N}$ における取引主体間の資産･財の移転をトランスファーとよぼう。そこで、$\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\in\mathbb{R}^3_+$ が $0\leqq\tau_i\leqq 1$ を満たすとき、τ を $\mathbb{N}$ における**トランスファー** transfer とよぶ。トランスファー τ の内容は、図 1 で示されるように、τ_1 は取引主体 1 が取引主体 2 に送付するものであり、τ_2 は取引主体 2 から 3、τ_3 は取引主体 3 から 1 へ送付される数量を、それぞれ非負の実数で表現している。

$\mathbb{N}$ におけるトランスファー $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ が実現すると、各取引主体の消費ベクトル $c=(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3_+$ は以下のように与えられる。

取引主体 1 : $c_1=1-\tau_1,\ c_2=0,\ c_3=\tau_3$

取引主体 2 : $c_1=\tau_1,\ c_2=1-\tau_2,\ c_3=0$

取引主体 3 : $c_1=0,\ c_2=\tau_2,\ c_3=1-\tau_3$

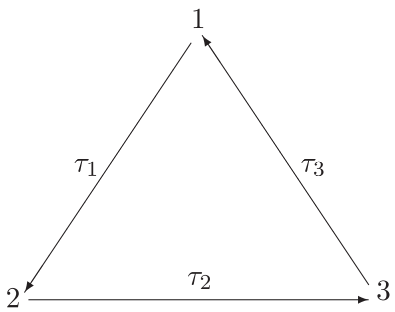

図 1: 基本的トランスファー・モデルにおける取引主体間のトランスファー $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$

以上のような取引主体間のトランスファー $\tau=(\tau_1,\tau_2,\tau_3)$ の一つの解釈はつぎのようになる。

1. 取引主体 1 は取引主体 3 が保有する資産・財の内、τ_3 を手に入れたいと考え、主体 1 は主体 2 に対し、主体 2 が所有する資産・財の内 τ_2 を主体 3 に移転するよう依頼する。

2. 取引主体 1 の依頼を主体 2 が受け入れるのに十分な支払を主体 1 は主体 2 に対して行い、それが主体 1 から主体 2 への移転 τ_1 で示される。

3. 取引主体 2 が τ_2 だけの移転を行うことを受け入れるには、主体 1 から少なくとも

$$\frac{1}{2}\tau_2\leqq\tau_1\leqq 1$$

の条件を満たす移転を受け取らなければならない。

4. 取引主体 1 がこうした十分な移転 τ_1 を主体 2 に対して行うには、主体 1 の個人合理性の条件
$$0 < \tau_1 \leqq 2\tau_3$$
が満たされなければならない。

5. 取引主体 3 の個人合理性を考慮すると主体 3 が τ_3 の移転を主体 1 に対して行うことに合意するには、主体 2 から主体 3 への移転 τ_2 が、
$$\tau_2 \geqq \frac{1}{2}\tau_3$$
を満たさなければならない。つまり、
$$\frac{1}{2}\tau_3 \leqq \tau_2 \leqq 1$$
でなければならない。

2.2 トランスファー・モデルにおける競争概念

本稿のトランスファー・モデルでは、Fujiki, Green and Yamazaki (2008) における場合と同様に、市場における価格を用いた取引を考察する訳ではない。そのため取引者間の「競争」をエッジワース流のゲームのコア概念によって考察する。

そうすることにより、取引上同じような立場に置かれた競争相手が存在しないという意味で市場における競争が欠如した基本的トランスファー・モデルにおいても、取引者間の「競争」の結果を考えることができる。[1)]

本稿では取引主体間の取引をトランスファーによって明示的に表現するため、通常の一般均衡モデルによる交換経済の場合のようにコア概念を消費配分について規定するのではなく、取引主体間のトランスファーについて定めることとする。

まず、トランスファー $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ に対し、$\mathbb{N}$ の間の τ による消費配分 $c(\tau) = (c^i(\tau))_{i\in\mathbb{N}}$ を

$$c^i(\tau) = \left(c_1^i(\tau), c_2^i(\tau), c_3^i(\tau)\right) \in \mathbb{R}_+^3,\ i \in \mathbb{N},$$
$$c_j^i(\tau) = \begin{cases} 1-\tau_i, & j = i, \\ 0, & j = i+1, \\ \tau_{i-1}, & j = i-1, \qquad j \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

によって定める。[2)]

[1)] 本稿の基本モデルを戦略形のゲームとして捉えた場合、ナッシュ均衡となるトランスファー τ は一意的に存在し、$\tau = (0,0,0)$ で与えられる。したがって、どのプレイヤーも他のプレイヤーに全く財・資産を移転しないような状況のみが均衡となり、本稿で意図するような「競争」の分析には適していない。

[2)] 以下、本稿では $i = 3$ のとき $i+1 = 1$、$i = 1$ のとき $i-1 = 3$、とする。

$S \subset \mathbb{N}, S \neq \emptyset,$ のとき、トランスファー $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ が S にとって**実行可能**であるとは、

$$(\forall i \in \mathbb{N})\ i \notin S \text{ または } (i+1) \notin S \text{ ならば } \ \tau_i = 0$$

を満たすことを言う。S がトランスファー τ を**改善する**とは、S にとって実行可能なトランスファー $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3) \in [0,1]^3$ で、μ による消費配分 $c(\mu)$ が条件

$$(\forall i \in S)\ u_i(c^i(\mu)) \geqq u_i(c^i(\tau)),$$
$$(\exists i \in S)\ u_i(c^i(\mu)) > u_i(c^i(\tau))$$

を満たすものが存在することを言う。

$\mathbb{N}$ 自体がトランスファ ー τ を改善できないとき、トランスファー τ は**パレート最適** (PO) であると言い、$S = \{i\}, i \in \mathbb{N},$ が τ を改善できないとき、τ は i の**個人合理性** (IR) を満たすと言う。どのような $S \subset \mathbb{N}, S \neq \emptyset$、についても、$S$ がトランスファー τ を改善できないならば、τ は**コア・トランスファー** core transfer であると言い、コア・トランスファー全体をトランスファーの**コア** core とよぶ。[3)]

2.3 基本モデルにおけるコアの分析

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ の基本モデルにおいては、$\mathbb{N}$ の間のトランスファー τ を二人の取引主体からなる $S \subset \mathbb{N}$ が改善することはありえない。実際、i と $i+1$ $(i = 1, 2, 3)$ からなる S の場合、

$$u_i(c^i(\tau)) = (1 - \tau_i) + 2\tau_{i-1}$$
$$u_{i+1}(c^{i+1}(\tau)) = (1 - \tau_{i+1}) + 2\tau_i$$

だから、i と $i+1$ の 2 人のみで、i の効用を高めるには、τ_i の値を小さくしなければならない一方、$i+1$ の効用を高めるには、τ_i の値を大きくしなければならないため、i と $i+1$ のみで二人の効用に関し、一方の効用を低下することなく、他方の効用を高めることはできない。したがって、$\mathbb{N}$ の間のトランスファー τ がコアになるための条件は、単に、τ が個人合理性 (IR) とパレート最適性 (PO) を満足することである。

そこでまず、トランスファー τ が PO となる条件を考えよう。今、すべての $i \in \mathbb{N}$ について、$\tau_i < 1$ だったとしよう。一般性を失うことなく、最もトランスファー τ_i が多い取引主体を 1 とする。$\lambda = 1 - \tau_1$ と置き、新たなトランスファー μ をつぎのように定める。

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \tau_1 + \lambda = 1 \\ \mu_2 &= \tau_2 + \frac{\lambda}{2} \\ \mu_3 &= \tau_3 + \frac{\lambda}{2} \end{aligned}$$

[3)] 通常の交換経済として $\mathbb{N}$ を考慮する場合、$\mathbb{N}$ におけるトランスファーは、個人取引のミクロの構造まで描写しているため、配分がコアであることとトランスファーがコア・トランスファーであることとの同値性が問題になるかも知れない。しかし、つぎの命題の成立を確かめることができる。

命題： $\mathbb{N}$ におけるトランスファ ー $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in [0,1]^3$ がコア・トランスファーであれば、$\mathbb{N}$ における τ による消費配分 $c(\tau) = (c^i(\tau))_{i \in \mathbb{N}}$ はコア配分である。逆に、$\mathbb{N}$ における消費配分 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3_+$ がコア配分ならば、 $\mathbb{N}$ におけるあるコア・トランスファ ー $\tau = (\tau_1, \tau_2, \tau_3) \in [0,1]^3$ と τ による消費配分 $c(\tau) = (c^i(\tau))_{i \in \mathbb{N}}$ に対し、$(\forall i \in \mathbb{N})\ f(i) = c^i(\tau)$ が成立する。

新しいトランスファー μ はその定め方より実行可能 (feasible) であることは容易に確認できる。

このとき、トランスファー μ が定める消費配分 $c(\mu)=(c^i(\mu))_{i\in\mathbb{N}}$ について

$$
\begin{aligned}
u_1(c^1(\mu)) &= (1-\mu_1)+2\mu_3 \\
&= (1-\tau_1-\lambda)+2\left(\tau_3+\frac{\lambda}{2}\right) \\
&= u_1(c^1(\tau)) \\
u_2(c^2(\mu)) &= (1-\mu_2)+2\mu_1 \\
&= \left(1-\tau_2-\frac{\lambda}{2}\right)+2\left(\tau_1+\lambda\right) \\
&= u_2(c^2(\tau))+\frac{3}{2}\lambda \\
&> u_2(c^2(\tau)) \\
u_3(c^3(\mu)) &= (1-\mu_3)+2\mu_2 \\
&= \left(1-\tau_3-\frac{\lambda}{2}\right)+2\left(\tau_2+\frac{\lambda}{2}\right) \\
&= u_3(c^3(\tau))+\frac{\lambda}{2} \\
&> u_3(c^3(\tau))
\end{aligned}
$$

が成立し、$\mathbb{N}$ は τ を改善できることになり、τ が PO であったことに反する。よって、トランスファー τ が PO ならば、

$$(\exists i\in\mathbb{N})\tau_i=1$$

が成立する。

逆に、ある $k\in\mathbb{N}$ について、$\tau_k=1$ であったとしよう。トランスファー τ による消費配分 $c(\tau)=(c^i(\tau))_{i\in\mathbb{N}}$ について，各主体の効用は,

$$
\begin{aligned}
u_k(c^k(\tau)) &= 2\tau_{k-1} \\
u_i(c^i(\tau)) &= 1-\tau_i+2\tau_{i-1} \\
&= \begin{cases} 3-\tau_{k+1}, & i=k+1 \text{ の場合}, \\ 1-\tau_{k-1}+2\tau_{k+1}, & i=k-1 \text{ の場合} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

である。いま仮に $\mathbb{N}$ がトランスファー τ を新しいトランスファー μ によって改善したとすれば、

$$1-\mu_k+2\mu_{k-1}\geqq 2\tau_{k-1} \tag{2}$$

$$1-\mu_{k+1}+2\mu_k\geqq 3-\tau_{k+1} \tag{3}$$

$$1-\mu_{k-1}+2\mu_{k+1}\geqq 1-\tau_{k-1}+2\tau_{k+1} \tag{4}$$

であり、いずれか少なくとも一つの不等号は厳密に成立しなければならない。このとき、(3) および (4) より主体 $k+1$ と $k-1$ について

$$\mu_{k+1} - \tau_{k+1} \leqq 2(\mu_k - 1) \tag{5}$$

$$\mu_{k-1} - \tau_{k-1} \leqq 2(\mu_{k+1} - \tau_{k+1}) \tag{6}$$

となる。トランスファーの条件 $0 \leqq \mu_k \leqq 1$ を考慮しつつ、主体 k の効用を τ と μ について比べると、(6) と (5) より

$$\begin{aligned} 0 \ \leqq \ u_k(c^k(\mu)) - u_k(c^k(\tau)) &= (1-\mu_k) + 2(\mu_{k-1} - \tau_{k-1}) \\ &\leqq (1-\mu_k) + 4(\mu_{k+1} - \tau_{k+1}) \\ &\leqq (1-\mu_k) + 8(\mu_k - 1) \\ &= 7(\mu_k - 1) \leqq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

を得るが、これらの不等号中少なくとも一つは厳密な不等号が成立しているため、上の一連の不等式・等式は矛盾を導く。よって、$\tau_k = 1$ の場合、$\mathbb{N}$ はトランスファー τ を改善することはできない。

以上の議論より，トラスファー τ において、ある $i \in \mathbb{N}$ について $\tau_i = 1$ であるならば、τ は PO である。

以上をまとめるとつぎの命題を得る。

命題 2.1 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3\}$ の間のトランスファー τ がパレート最適となる必要十分条件は、

$$(\exists i \in \mathbb{N})\tau_i = 1$$

で与えられる。

ついで個人合理性の条件を確認しよう。トランスファー τ による消費配分 $c(\tau)$ について、取引主体 $i \in \mathbb{N}$ の個人合理性 IR が満たされるためには、すべての個人 $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} u_i(c^i(\tau)) &= 1 - \tau_i + 2\tau_{i-1} \\ &\geqq u_i(e_i) = 1 \end{aligned}$$

が成立しなければならない。したがって、

$$(\forall i \in \mathbb{N}) \ \tau_i \leqq 2\tau_{i-1} \tag{8}$$

を IR の条件として得る。

基本モデルにおけるコア・トランスファーの条件は PO と IR を満たすことであったから、ここまでの議論の結果を用いて、コア・トランスファーを以下のように特徴付けることができる。

命題 2.2 基本的トランスファー・モデルにおいて、トランスファー τ がコア・トランスファーとなる必要・十分条件は、ある $i \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tau_i = 1, \ \tau_{i-1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \ \tau_{i+1} \in \left[\frac{\tau_{i-1}}{2}, 1\right]$$

が成立することである。

本節で取り上げた基本的トランスファー・モデルにおいては、取引主体間の本質的な競争は存在しないため、コア概念によって、成立しうるトランスファーを絞り込むことは余りできていない。例えば、上の命題における $\tau_3 = 1$ のケースでは、取引主体が最大限の資産・財の移転を行う状況であるが、それを取引主体 1 と 2 の間でどちらの方がより多くのメリットを得ることになるかは確定的ではなく、主体 1 の方により多くのメリットが行く場合と、逆に主体 2 の方により多くのメリットが行く場合とがコア・トランスファーにおいても生じうる結果になっている。

しかし、このような結果は資産・財の移転を担う「競争相手」が出現することにより、競争相手を持つことになる取引主体が、「レント」的利益を全く得られなくなることが予想される。そこで、つぎの節では基本的トランスファー・モデルの中に取引主体の競争相手を一人組み入れ、その結果、トランスファーのコア概念がどのような競争の結果を予測するかを分析することにしたい。

3　競争を導入したヴィクセル型トランスファー・モデル

3.1　基本的トランスファー・モデルへの競争的取引主体の導入

取引のシナリオ　前節の基本的トランスファー・モデルでは、三人の取引主体がおり、それぞれ自分の保有する資産・財を「決済」に用いて、他の取引主体が保有する資産・財を手に入れたいと考えている場合の資産や財のトランスファー（移転）の構図を分析した。取引主体 1 の視点から眺めると、この構図はつぎのようになっている。

主体 1 は主体 3 の保有する資産・財を手に入れたいと考えているが、主体 1 自身が保有する資産・財を主体 3 は欲しいとは考えていない。そこで主体 1 は主体 3 が欲する資産・財を保有し、かつ主体 1 の保有している資産・財を欲する主体 2 に対して、主体 3 への資産・財の移転を依頼し、主体 3 が主体 2 の望む資産・財の移転に応ずるという構図である。

本節ではこのような基本的構図をつぎのように拡張する。つまり、取引主体 1 が主体 3 の保有する資産・財を手に入れるために、取引主体 2 に対して、2 の保有する資産や財の移転を主体 3 に対して行うことを依頼するとき、そうした「決済」の役割を取引主体 2 のみが担うとすれば、主体 2 はそうした役割において、言わば独占的地位を占めることになり、取引に伴うトランスファーにおいて、「レント」を得る立場にあることになる。そうした独占的役割を排除した競争的なモデルを考えるために、取引主体 2 と全く同一の役割を担うもう一人の取引主体を考え、この二人の取引主体として主体 2_1 および主体 2_2 を考える。2_1 と 2_2 はそれぞれのコピー（「生き写し」、あるいは「複製」）とし、同一の効用関数と初期保有ベクトルを持つものとする。

基本的モデルにおけるトランスファーのヴィクセル型三角形を $\Delta 123$ と表現するとすると、本節で考察するのは $\Delta 12_1 3$ および $\Delta 12_2 3$ という二つのヴィクセル型三角形で表されるトランスファーの構図を持つ資産・財の移転のシステムである。したがって、本節における取引主体全体の集合は

$$\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3\}$$

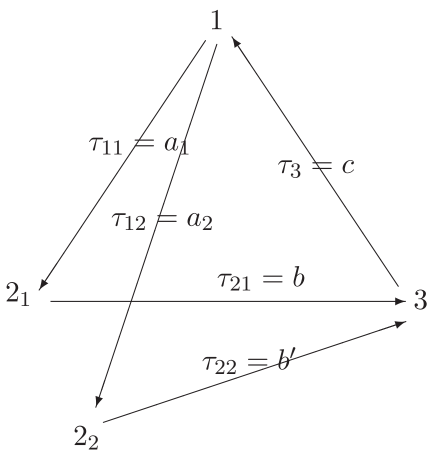

図 2: ヴィクセル型三角形における競争を伴うトランスファー $\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_3) = (a_1, a_2, b, b', c)$ の表記

である。取引主体 1 と 3 の効用関数 u_1, u_3 および初期保有ベクトル e_1, e_3 は基本モデルと同じであり、主体 2_1 と主体 2_2 については、基本モデルにおける主体 2 の効用関数 u_2 と初期保有ベクトル e_2 とに等しいものとし、

$$u_2 = u_{21} = u_{22}, e_2 = e_{21} = e_{22}$$

とする。効用関数と初期保有ベクトルに関し、下付きの添え字 $2j$ は主体 2_j に関するものであることを表す。

$\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3\}$ の間のトランスファー τ を

$$\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_3)$$

で表現し、τ_{ij} の i は取引主体が 1 か 2 かを示す。基本モデルにおける取引主体 2 のコピーは二人いるので、$i = 1$ のとき、j は 2_1 あるいは 2_2、誰へのトランスファーかを示し、$i = 2$ のとき、j は 2_1 あるいは 2_2、誰からのトランスファーかを示す添字とする。二つのヴィクセル型三角形から成り立つトランスファーの図式は図 2 で示されている。前節の基本的トランスファー・モデルでは一般に $\tau \in [0,1]^3$ をトランスファーと呼んだが、本節の $\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3\}$ においては $\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_3) \in [0,1]^5$ が制約条件

$$0 \leqq \tau_{11} + \tau_{12} \leqq 1$$

を満たす場合、つまり、各主体が自己の初期保有量の範囲内で財の移転を行う場合に、τ をトランスファーと呼ぶ。

図 1 と図 2 の比較から明らかなように、図 2 におけるトランスファーの構図の違いは、取引主体 2_1 と 2_2 の間が競合関係になっていることである。上のシナリオに沿った表現をすれば、取引主体 1 が主体 3 に対して 3 から送られる資産・財の支払決済を行うとき、図 1 においては主体 2 に依頼するルートしか存在しなかったわけであるが、図 2 では二人の取引主体 2_1 と 2_2 の間から選ぶことが可能であり、言わば、取引主体 1 にとってより好条件を提示する主体を選ぶことができる状況になっている。

3.2　トランスファー・モデルにおけるコア

$\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3\}$ の間のトランスファー $\tau=(\tau_{11},\tau_{12},\tau_{21},\tau_{22},\tau_3)\in[0,1]^5$ のコアの定義は前節と同様に定めることができる。[4)]

前節における $\mathbb{N}=\{1,2,3\}$ の間のトランスファー τ の場合、τ がコア・トランスファーになる条件は、τ が PO と IR の条件を満たすことであった。本節における $\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3\}$ の場合は、τ が PO と IR の条件を満たすことに加えて、$\{1,2_1,3\}$ および $\{1,2_2,3\}$ がトランスファー τ を改善できないという制約が加わることになる。

$\mathbb{N}$ の間のトランスファー $\tau\in[0,1]^5$ に対し、記号 τ_1 と τ_2 を便宜上つぎのように定めておく。

$$\tau_i=\tau_{i1}+\tau_{i2},\ i=1,2,$$

まず、$\mathbb{N}$ における各取引主体の IR の条件を確認しておこう。各主体の IR の条件はつぎの

---

4) 本節以降、各タイプの取引主体について順次そのコピーを追加して分析を進めるため、説明の重複を避ける目的から、ここで、より一般的な $\mathbb{N}$ におけるトランスファーについて、コア・トランスファーの定義を与えることにする。

今、集合 $J_i, i=1,2,3,$ をタイプ i の取引主体のコピーの集合とし、$\mathbb{N}=\{i_j|\ i=1,2,3,j\in J_i\}$ とする。$\tau_{ijk}\in[0,1],i=1,2,3,j\in J_i,k\in J_{i+1},$ を取引主体 i_j から取引主体 $(i+1)_k$ へ移転される数量とすると、$\mathbb{N}$ の間のトランスファーは $\tau=(\tau_{ijk})_{i=1,2,3,j\in J_i,k\in J_{i+1}}$, でかつ、各主体が他の主体に移転する財の総量が自己の初期保有量を上回ることなく、

$$(\forall i=1,2,3)(\forall j\in J_i)\sum_{k\in J_{i+1}}\tau_{ijk}\in[0,1]$$

の制約を満たすものによって表現される。このとき、トランスファー τ による消費配分 $c(\tau)$ は、各取引主体 i_j の消費ベクトル $c^{ij}(\tau)$ のリスト

$$c(\tau)=\left(c^{ij}(\tau)\right)_{j\in J_i,i=1,2,3}$$

$$c^{ij}_\ell(\tau)=\begin{cases}1-\sum_{k\in J_{i+1}}\tau_{ijk}, & \ell=i\quad \text{の場合}\\ 0, & \ell=i+1\quad \text{の場合}\\ \sum_{k\in J_{i-1}}\tau_{(i-1)kj}, & \ell=i-1\quad \text{の場合}\end{cases}$$

であり、消費配分 $c(\tau)$ から各取引主体 $i_j,i=1,2,3,j\in J_i$ が得る効用水準は、

$$u_{ij}\left(c^{ij}(\tau)\right)=\left(1-\sum_{k\in J_{i+1}}\tau_{ijk}\right)+2\sum_{k\in J_{i-1}}\tau_{(i-1)ki_j}$$

により表現される。

$\mathbb{N}$ の間のトランスファー $\tau=(\tau_{ijk})_{i=1,2,3,j\in J_i,k\in J_{i+1}}$ が $S\subset\mathbb{N}$ にとって**実行可能**であるとは、

$$(\forall i_j\in\mathbb{N})\ i_j\notin S \text{ または } (i+1)_k\notin S \text{ ならば }\ \tau_{ijk}=0$$

を満たすことを言う。$S\subset\mathbb{N}$ がトランスファー τ を**改善する**とは、S にとって実行可能なトランスファー $\mu=(\mu_{ijk})_{i=1,2,3,j\in J_i,k\in J_{i+1}}$ で、μ による消費配分 $c(\mu)$ が条件

$$(\forall i_j\in S)\ u_{ij}(c^{ij}(\mu))\geqq u_i(c^{ij}(\tau)),$$
$$(\exists i_j\in S)\ u_{ij}(c^{ij}(\mu))>u_{ij}(c^{ij}(\tau))$$

を満たすものが存在することを言う。どのような $S\subset\mathbb{N},S\neq\emptyset$、についても、$S$ がトランスファー τ を改善できないならば、τ は**コア・トランスファー**であると言う。

ように与えられる。

$$
\begin{aligned}
u_1(c^1(\tau)) &= 1-\tau_1+2\tau_3 \geqq 1\\
u_{2j}(c^{2j}(\tau) &= 1-\tau_{2j}+2\tau_{1j} \geqq 1,\ j=1,2\\
u_3(c^3(\tau)) &= 1-\tau_3+2\tau_2 \geqq 1
\end{aligned}
$$

したがって、$\mathbb{N}$ の各取引主体に対し、それぞれの IR の条件は、

$$
\begin{aligned}
\tau_3 &\geqq \frac{1}{2}\tau_1\\
\tau_{1j} &\geqq \frac{1}{2}\tau_{2j},\ j=1,2\\
\tau_2 &\geqq \frac{1}{2}\tau_3
\end{aligned}
$$

となる。

ついで、トランスファー τ が PO であるとしよう。このとき、

$$
\tau_1=1, \tau_{21}=\tau_{22}=1, \tau_3=1
$$

の三条件のうち、少なくとも一つが成立していなければ、$\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3\}$ が τ を改善することができることは、前節と全く同様な議論によって示すことができる。

つぎに上の条件は τ が PO であるために十分であることを確認しよう。基本的には前節の命題 2.1 における十分性の証明と同様な議論展開で良いが、タイプ 2 の取引主体が複数いる点の注意が必要である。証明の重複を避けるため、以下では命題 2.1 の十分性の証明の変更点のみを説明する。

$k=1$ または $k=3$ について $\tau_k=1$ であった場合は、(1) 式における各主体の効用水準について、主体 2 の効用水準をタイプ 2 の各主体、つまり主体 2_1 と 2_2、の効用水準と読み替え、さらに、そこでの τ_1 と τ_2 を τ_{1j} と $\tau_{2j}, j=1,2,$ と読み替える。

今、仮に $\mathbb{N}$ がトランスファー τ を新しいトランスファー μ によって改善したとすれば、(2) 式から (7) 式において、$\tau_i=\tau_{i1}+\tau_{i2}$、$\mu_i=\mu_{i1}+\mu_{i2}$、$i=1,2$、と読めば、(7) 式が示す一連の不等式・等式における不等号中少なくとも一つは厳密な不等号が成立しているため、矛盾が導かれる。

最後に、$\tau_{21}=\tau_{22}=1$ の場合は、(1) 式から (7) 式における $k=2$ の場合に相当し、これらの各式における上の読み替えの注意に加えて、(3) 式の左辺において 3 を 5 に置き換え、そして (7) 式において、

$$
\begin{aligned}
u_k(c^k(\mu)) &= u_{k1}(c^{k1}(\mu))+u_{k2}(c^{k2}(\mu))\\
u_k(c^k(\tau)) &= u_{k1}(c^{k1}(\tau))+u_{k2}(c^{k2}(\tau))
\end{aligned}
$$

として読めば、(7) 式における一連の不等号および等号が成立し、矛盾が導かれる。

したがって、どのような $\mathbb{N}$ のトランスファー $\mu \in [0,1]^5$ を用いても、$\mathbb{N}$ は τ を改善することはできない。

命題 3.1　$\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3\}$ の間のトランスファー τ がパレート最適となる必要・十分条件は、つぎの (i) から (iii) のうちの少なくとも一つが成立することである。

$$\text{(i)}\ \tau_1 = 1, \quad \text{(ii)}\ \tau_{21} = \tau_{22} = 1, \quad \text{(iii)}\ \tau_3 = 1$$

ただし、ここで $\tau_1 \equiv \tau_{11} + \tau_{12}$ である。

最後に、三人の取引主体からなる $S \subset \mathbb{N}$ について、それがトランスファー τ を改善できないための条件を確認しておこう。この場合、三人の取引主体からなる $S \subset \mathbb{N}$ の内、主体 2_1 と 2_2 が同時に含まれる $S \subset \mathbb{N}$ については、いかなるトランスファーに対しても改善することができないから、検討の対象となる $S \subset \mathbb{N}$ は $\{1, 2_1, 3\}$ と $\{1, 2_2, 3\}$ のみである。

したがって、$\mathbb{N}$ の間のトランスファー τ を $\Delta 12_1 3$ と $\Delta 12_2 3$ の 2 つのヴィクセル型三角形の基本モデルに分解したとき、それぞれの $\Delta 12_j 3,\ j = 1, 2,$ において、τ が限定された $\Delta 12_j 3$ において PO 条件を満たすことが、これらの $S \subset \mathbb{N}$ が改善できないことの条件だと考えられるかも知れない。つまり、ある $i \in \{1, 2_j, 3\}$ について、$\tau_i = 1$ が成り立っているならば、基本モデルにおける PO 条件の議論の場合と同じように $\{1, 2_j, 3\}$ の改善が可能ではないと考えられるかも知れない。しかし、本節のトランスファー・モデルの場合には、資産・財の移転ルート $\Delta 12_j 3$ について、取引主体 1 と 3 にとっては、言わば「逃げ道」として、別の移転ルート $\Delta 12_k 3,\ k \neq j,$ が用意されている。したがって、トランスファー τ に対し、$\{1, 2_j, 3\}$ が改善可能でないための条件は、$\Delta 12_j 3$ のヴィクセル型三角形内のみで PO 条件を考えるケースとは異なっている。

そこで $\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3\}$ の間のトランスファー τ が $S_i \equiv \{1, 2_i, 3\},\ i = 1, 2,$ によって改善されないための条件を考察しよう。記号を簡略化し、トランスファー τ を

$$\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{21}, \tau_{22}, \tau_3) = (a_1, a_2, b, b', c)$$

と書いて議論を進める (図 2 参照)。トランスファー τ がパレート最適性の条件を満たすことことから、

$$a_1 + a_2 = 1,\ b = b' = 1,\ c = 1 \tag{9}$$

の等式のうち少なくとも一つは成立しなければならない。さらに IR の条件を満たすことことから、

$$a_1 \geqq \frac{1}{2} b, \quad a_2 \geqq \frac{1}{2} b' \tag{10}$$

$$b + b' \geqq \frac{1}{2} c \tag{11}$$

$$c \geqq \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \tag{12}$$

が成立しなければならない。

S_i によるトランスファー τ の改善の可能性に関して、μ を実数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \delta', \gamma$ に対し、$i = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \mu_{11} = a_1 + \varepsilon_1, &\qquad \mu_{21} = b + \delta \\ \mu_3 = c + \gamma, &\qquad \mu_{12} = \mu_{22} = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

と定め、$i=2$ の場合

$$\begin{aligned} \mu_{12} &= a_2 + \varepsilon_2, \qquad \mu_{22} = b + \delta' \\ \mu_3 &= c + \gamma, \qquad \mu_{11} = \mu_{21} = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

と定める。μ がトランスファーであれば、それぞれ S_i の間で実行可能であり、$i=1$ の場合、S_1 に属する各主体について、トランスファー μ と τ による消費配分の効用の差は、それぞれ

$$\begin{aligned} u_1(c^1(\mu)) - u_1(c^1(\tau)) &= (1 - a_1 - \varepsilon_1) + 2(c + \gamma) \\ &\qquad - [(1 - a_1 - a_2) + 2c] \\ &= 2\gamma + (a_2 - \varepsilon_1) \\ u_{21}(c^{21}(\mu)) - u_{21}(c^{21}(\tau)) &= (1 - b - \delta) + 2(a_1 + \varepsilon_1) \\ &\qquad - [(1 - b) + 2a_1] \\ &= 2\varepsilon_1 - \delta \\ u_3(c^3(\mu)) - u_3(c^3(\tau)) &= (1 - c - \gamma) + 2(b + \delta) \\ &\qquad - [(1 - c) + 2(b + b')] \\ &= 2(\delta - b') - \gamma \end{aligned}$$

となる。したがって、S_1 に属する各主体の効用が改善する可能性については

$$\begin{aligned} u_1(c^1(\mu)) \geqq u_1(c^1(\tau)) &\Longleftrightarrow \gamma \geqq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - a_2) \\ u_{21}(c^{21}(\mu)) \geqq u_{21}(c^{21}(\tau)) &\Longleftrightarrow \varepsilon_1 \geqq \frac{1}{2}\delta \\ u_3(c^3(\mu)) \geqq u_3(c^3(\tau)) &\Longleftrightarrow \delta \geqq b' + \frac{1}{2}\gamma \end{aligned} \tag{15}$$

である。[5)]

同様に $i=2$ の場合ついても、S_2 に属する各主体の効用が改善する可能性について、

$$\begin{aligned} u_1(c^1(\mu)) \geqq u_1(c^1(\tau)) &\Longleftrightarrow \gamma \geqq \frac{1}{2}(\varepsilon_2 - a_1) \\ u_{22}(c^{22}(\mu)) \geqq u_{22}(c^{22}(\tau)) &\Longleftrightarrow \varepsilon_2 \geqq \frac{1}{2}\delta' \\ u_3(c^3(\mu)) \geqq u_3(c^3(\tau)) &\Longleftrightarrow \delta' \geqq b + \frac{1}{2}\gamma \end{aligned} \tag{16}$$

を得る。

S_i による効用改善の条件 (15) と (16) とを、トランスファー τ の変更を示すパラメター $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta, \delta', \gamma$ に対する制約ごとに考察しよう。最初に S_1 に関し、γ ついて考えると、μ がト

[5)] 厳密に言えば、S_i がトランスファー τ を μ によって改善するとは、これらの不等式がすべて成立し、少なくともそのうちの一つが厳密な不等号で成立することである。本稿では以後このことはことわらない。

ランスファーとなるような γ の範囲も考慮し、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}1-c \geqq \gamma &\geqq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - a_2)\\ &\geqq \frac{1}{4}\delta - \frac{1}{2}a_2\\ &\geqq \frac{1}{4}b' - \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{8}\gamma\end{aligned}$$

この関係から

$$1-c \geqq \gamma \geqq \frac{2}{7}\left(b' - 2a_2\right)$$

が成立し、不等号の一つが厳密に成立するときに S_1 が μ によって τ を改善できるような γ の値が存在する。したがって、タイプ 2 の主体の IR 条件 (10) を加味すると、S_1 が τ を改善できない条件の一つとして

$$0 \leqq \frac{1}{7}\left(2a_2 - b'\right) \leqq \frac{1}{2}(c-1) \tag{17}$$

を得る。同様の議論を ε_1, δ に対して行うことで、S_1 が μ によって τ を改善できるような ε_1 や δ の値が存在しない条件として、それぞれつぎの不等式を得る。

$$0 \leqq \frac{1}{7}\left(2a_2 - b'\right) \leqq \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2 - 1\right) \tag{18}$$

$$0 \leqq \frac{1}{7}\left(2a_2 - b'\right) \leqq b + b' - 1 \tag{19}$$

$i=2$ の場合についても同様の議論により、S_2 が μ により τ を改善することができない条件として、$\gamma, \varepsilon_2, \delta',$ についての制約それぞれに対応した以下の不等式のうちの一つが満たされることが導かれる。

$$0 \leqq \frac{1}{7}\left(2a_1 - b\right) \leqq \frac{1}{2}(c-1) \tag{20}$$

$$0 \leqq \frac{1}{7}\left(2a_1 - b\right) \leqq \frac{1}{4}\left(a_1 + a_2 - 1\right) \tag{21}$$

$$0 \leqq \frac{1}{7}\left(2a_1 - b\right) \leqq b + b' - 1 \tag{22}$$

$b+b' \leqq 1$ の場合、(17) から (19) のいずれか、また (20) から (22) のいずれの不等式が成立しても、$2a_1 \leqq b$ と $2a_2 \leqq b'$ が成り立つから、タイプ 2 の主体の IR 条件 (10) より、$a_1 = (1/2)b, a_2 = (1/2)b'$ でなければばならない。つまり、

$$b + b' \leqq 1 \text{ の場合は、} \quad a_1 = \frac{1}{2}b \quad \text{および} \quad a_2 = \frac{1}{2}b' \tag{23}$$

が成立する。

そこで $b+b'$ の値により領域を区分けし、トランスファー τ がコア・トランスファーであれば満たすべき条件を、(9) のパレート最適性の条件ごとに確認しよう。

ケース I： $a_1 + a_2 = 1$ の場合

(IA) $b + b' \leqq 1$ の領域

τ が仮にコア・トランスファーだとすると、(23) から

$$b + b' = 2(a_1 + a_2) > 1$$

となり、$b + b' \leqq 1$ と矛盾するため、この領域ではコア・トランスファーになり得ない。

(IB) $b + b' > 1$ の領域

この領域においてトランスファー τ が S_i に改善されないためには、少なくとも (19) と (22) の不等式が満たされなくてはならない。したがって、主体 1 の IR 条件、$c \geqq 1/2$ と共に、つぎの不等式

$$b + b' \geqq 1 + \frac{1}{7} \max \left\{ 2a_1 - b, 2a_2 - b' \right\} \tag{24}$$

が成立しなければならない。

ケース II： $b = b' = 1$ の場合

この場合は $b + b' > 1$ の領域となるから、上の (IB) の場合と同様に主体の IR 条件がコア・トランスファーの条件であり、タイプ 2 の各主体および主体 3 の IR 条件から、

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2}, \quad c \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$$

が条件となる。ここで $a_1 + a_2 = 1$ となるため、結局 $b = b' = 1$ の場合は上の (IB) のケースに含まれる。

ケース III： $c = 1$ の場合

(IIIA) $b + b' \leqq 1$ の領域

τ がコア・トランスファーであれば、(23) が成立し、この領域において、主体 1 およびタイプ 2 の主体の IR 条件は満たされている。さらに、(17) から (22) までの不等式は満たされるから、主体 3 の IR 条件 (11) の成立がコア・トランスファーの条件となる。したがって、

$$\frac{1}{4} \leqq \frac{1}{2}(b + b') = a_1 + a_2 \leqq \frac{1}{2}$$

が条件となる。

(IIIB) $b + b' > 1$ の領域

この領域においてトランスファー τ が S_i に改善されないためには、上の (IB) の場合と同様に、少なくとも (19) と (22) の不等式が満たされなくてはならない。したがって、主体 1 および主体 3 の IR 条件は満たされているから、タイプ 2 の主体の IR 条件 (10) および不等式 (24) の成立がコア・トランスファーの条件となる。

以上の議論をまとめ、コア・トランスファーの条件に関するつぎの結果を得る。

命題 3.2 取引主体が $\mathbb{N}=\{1,2,3\}$ の基本的トランスファー・モデルに主体 2 の競争相手を一人追加し、取引主体を $\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3\}$ とした競争的トランスファー・モデルにおけるトランスファー $\tau=(\tau_{11},\tau_{12},\tau_{21},\tau_{22},\tau_3)\in[0,1]^5$ がコア・トランスファーであれば、つぎの条件の一つを満足する。また、逆に、トランスファー τ がつぎの条件の一つを満足するならば、コア・トランスファーである。

$$
\begin{aligned}
\text{(i)}\quad & \tau_1\equiv\tau_{11}+\tau_{12}=1,\ 2\tau_{11}\geqq\tau_{21},\ 2\tau_{12}\geqq\tau_{22}\\
& \tau_2\equiv(\tau_{21}+\tau_{22})\geqq 1+\frac{1}{7}\max\{2\tau_{1j}-\tau_{2j}|\ j=1,2\}\\
& \tau_3\in\left[\frac{1}{2},1\right]\\
\text{(ii)}\quad & \tau_3=1,\ 2\tau_{11}\geqq\tau_{21},\ 2\tau_{12}\geqq\tau_{22},\\
& \tau_1\equiv\tau_{11}+\tau_{12}=\overline{\tau}_2\in\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]\\
\text{(iii)}\quad & \tau_3=1,\ 2\tau_{11}\geqq\tau_{21},\ 2\tau_{12}\geqq\tau_{22}\\
& \tau_1\geqq\overline{\tau}_2,\ \tau_2\geqq 1+\frac{1}{7}\max\{2\tau_{1j}-\tau_{2j}|\ j=1,2\}
\end{aligned}
$$

上の命題 3.2 は基本モデルにおける競争の結果を示す命題 2.2 と比べて、取引主体 2 の競争相手が一人増えることにより、タイプ 2 の各取引主体の取引によるメリットがどの程度抑えられてしまうか、また、それと対照的に主体 1 と主体 3 のメリットがどの程度向上するかを示している。

各主体の競争相手がいない基本モデルにおける競争の結果は、少なくとも一人の主体が所持する財の総量をすべて他の主体に移転していれば、他の主体は最低限各主体が個人合理性を満たす範囲の移転をしていればよいというものであった。そのためすべての主体が所持する財の総量をすべて他の主体に移転するという結果から、財の総量をすべて他の主体に移転した主体が他の主体からは総量の四分の一だけ受け取り、個人合理性がぎりぎり満たされるに過ぎず、特定の主体に大きなレントが発生してしまうという状況までもが結果として生じ得た。

取引主体 2 の競争相手が一人増えることにより、こうした状況がどう変化するかを、主体 1 あるいは主体 3 にとって「最悪」の場合を例にとって説明しよう。主体 1 が所持する財の総量をすべてタイプ 2 の主体に移転し、$\tau_1=1$ の場合、主体 1 が主体 3 からの移転を受け取る数量の範囲に変化はない。タイプ 2 の競争相手が存在することにより変化するのは、タイプ 2 の主体からの移転数量である。主体 2 の競争相手が存在しない基本モデルにおいては、所持する財について最低限、その総量の四分の一のみ移転するだけでよかったが、タイプ 2 の主体間の「競合関係」によって、タイプ 2 の主体は一人当たりその二倍を上回る数量、つまり、

$$\overline{\tau}_2\equiv\frac{1}{2}(\tau_{21}+\tau_{22})>\frac{1}{2}$$

を移転せざるを得なくなる。これは主体 1 がタイプ 2 の主体間の競合関係を利用することにより、タイプ 2 の主体のレントを抑制する効果が生まれるからだと考えられる。

他方、主体 3 が所持する財の総量をすべて主体 1 に移転し、$\tau_3 = 1$ の場合、タイプ 2 の競争相手が存在しない基本モデルにおいて、主体 1 は主体 2 に対し、最低限で総量の四分の一のみ移転すればよく、$\tau_1 = 1/4$ であり、主体 2 は主体 3 に対し最低限で総量の二分の一のみ移転すればよかった。主体 2 の競争相手が一人増えることによる変化は、つぎのようになる。タイプ 2 の主体全体からの総量が主体 3 の個人合理性を最低ラインで満足し $\tau_2 = 1/2$ ならば、主体 1 からの移転の数量は基本モデルの場合と同様に、所持する財の総量の四分の一のみの移転でよい。（ただし、タイプ 2 の主体の数は二倍になっているので、タイプ 2 の主体一人当たりの数量はその半分で、$\overline{\tau}_2 = 1/4$ となる。）

以上、命題 3.2 の結果から理解できることは、ある一つのタイプの主体の競争相手が現れた場合、そのタイプの主体が取引から得られるレントは抑制されるが、他の主体が得られるレントを増大させることはないということである。

4　より競争的なヴィクセル型トランスファー・モデル

4.1　競争的取引主体の増加

前節では、三人の取引主体で構成されていた基本的トランスファー・モデルに、主体 2 と同一の役割を担う主体を導入した。この導入によって、競争的な状況下でトランスファーに生じていた「レント」がどのように変化するかを考察した。本節では、より競争的な状況を考えるために、前節のモデルに取引主体 3 と同一の役割を担う主体を導入する。この導入によって、競争力が大きくなることで「レント」がどのように変化するかを考察する。

前節同様、取引主体 3 と同一の役割を担う取引主体を考え、その主体をそれぞれ主体 3_1 および主体 3_2 とする。したがって 3_1 と 3_2 はそれぞれ同一の効用関数と初期保有ベクトルを持つものとする。このとき、本節における取引主体の集合は

$$\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$$

となる。取引主体 1 の効用関数 u_1 及び初期保有ベクトル e_1 は基本モデルと同じであり、主体 2_1、2_2、3_1 及び 3_2 については、基本モデルにおける主体 2 及び 3 の効用関数 u_2, u_3、初期保有ベクトル e_2, e_3 とそれぞれ等しいとする。

こうした主体の導入によって、本節で考察するトランスファーのヴィクセル型三角形は $\Delta 12_1 3_1$、$\Delta 12_1 3_2$、$\Delta 12_2 3_1$ 及び $\Delta 12_2 3_2$ の四つになる。いま、$\mathbb{N}$ の間のトランスファー τ を

$$\begin{aligned} \tau &= (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{211}, \tau_{212}, \tau_{221}, \tau_{222}, \tau_{31}, \tau_{32}) \\ &= (a_1, a_2, b_1, b_2, b'_1, b'_2, c, c') \end{aligned}$$

で表現する。τ_{1j} は取引主体 1 の主体 2_j へのトランスファーを表す。τ_{2jk} は取引主体 2_j の主体 3_k へのトランスファーを表す。τ_{3j} は取引主体 3_j の主体 1 へのトランスファーを表す。さらに以下の議論では、τ で表現しているトランスファーを記号 $a, b, , c$ で簡略化する。即ち、a, b, c で、取引主体 1 から 2、取引主体 2 から 3、取引主体 3 から 1 へのトランスファーをそ

れぞれ表している。サブスクリプトで財が送られる主体のタイプを表し、アポストロフィーの有無で、タイプ 1 とタイプ 2 によるトランスファーを表す。例えば a_2, b'_1, c で、主体 1 から主体 2_2 へのトランスファー、主体 2_2 から主体 3_1 へのトランスファー、主体 3_1 から主体 1 へのトランスファーをそれぞれ表す。四つのヴィクセル型三角形から成り立つトランスファーの図式は図 3 で示されている。

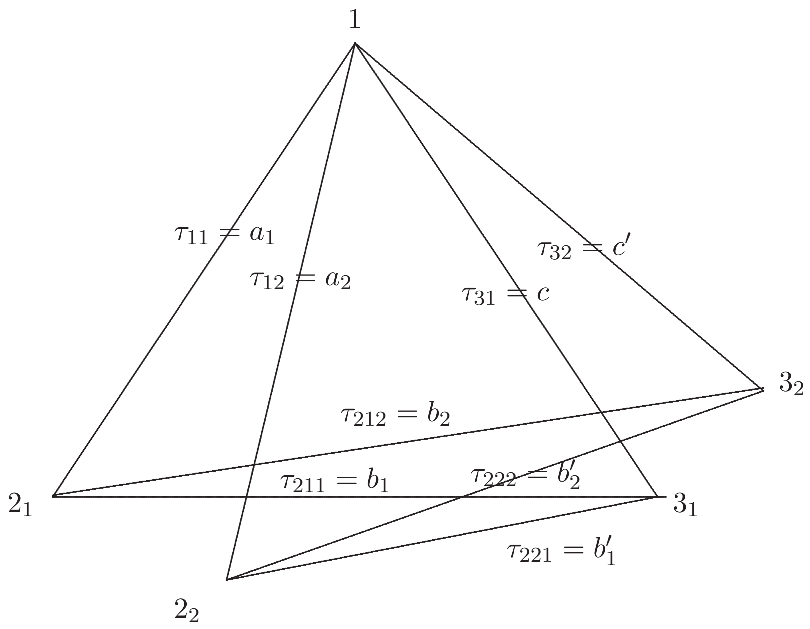

図 3: $\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の間のコア・トランスファー $\tau = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{211}, \tau_{212}, \tau_{221}, \tau_{222}, \tau_{31}, \tau_{32}) = (a_1, a_2, b_1, b_2, b'_1, b'_2, c, c')$ の表記

図 3 より明らかなように、取引主体 2 の複製に加えて取引主体 3 の複製も導入されることで、資産・財の支払い決済を行う際に、取引主体 1 のみならず取引主体 2_1 及び 2_2 に対しても取引主体 $3_1, 3_2$ の二人から選択できるようになったことになる。

4.2 トランスファー・モデルにおける IR・PO 条件

$\mathbb{N} = \{1, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の間のトランスファー $\tau \in [0, 1]^8$ のコアの定義は、一般的に注 4 で定めたように、τ が PO と IR の条件を満たすことに加えて、上述の四つの三角形の少なくとも一つを含む $S \subseteq \mathbb{N}$ によって τ が S の間で実行可能な他のトランスファーによって改善されないという制約が加わる。本節でまず IR と PO の両条件を確認することから始める。

まず、$\mathbb{N}$ における各取引主体の IR の条件を確認しておこう。各主体の IR の条件はつぎの

ように与えられる。

$$
\begin{aligned}
u_1(c^1(\tau)) &= (1-\tau_{11}-\tau_{12})+2(\tau_{31}+\tau_{32}) \\
&= (1-a_1-a_2)+2(c+c') \geqq 1 \\
u_{21}(c^{21}(\tau)) &= (1-\tau_{211}-\tau_{212})+2\tau_{11} \\
&= (1-b_1-b_2)+2a_1 \geqq 1 \\
u_{22}(c^{22}(\tau)) &= (1-\tau_{221}-\tau_{222})+2\tau_{12} \\
&= (1-b_1'-b_2')+2a_2 \geqq 1 \\
u_{31}(c^{31}(\tau)) &= (1-\tau_{31})+2(\tau_{211}+\tau_{221}) \\
&= (1-c)+2(b_1+b_1') \geqq 1 \\
u_{32}(c^{32}(\tau)) &= (1-\tau_{32})+2(\tau_{212}+\tau_{222}) \\
&= (1-c')+2(b_2+b_2') \geqq 1
\end{aligned}
$$

いま、$a \equiv a_1+a_2$, $b \equiv b_1+b_2$, $b'=b_1'+b_2'$ と定める。このとき $\mathbb{N}$ の各取引主体に対し、それぞれの IR の条件は、

$$
\begin{aligned}
&a \leqq 2(c+c') \\
&b \leqq 2a_1, \qquad\qquad b' \leqq 2a_2 \\
&c \leqq 2(b_1+b_1'), \quad c' \leqq 2(b_2+b_2')
\end{aligned}
$$

となる。

ついで、トランスファー τ の PO 条件について考える。前節と同様な議論から、次のいずれかの条件

$$
\text{(i)}\, a=1, \quad \text{(ii)}\, b=b'=1, \quad \text{(iii)}\, c=c'=1 \tag{25}
$$

を満たすことが、$\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3_1,3_2\}$ における PO 条件を満たすことの必要十分条件となることを示すことができる。

4.3 トランスファーモデルにおけるコア

$\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3_1,3_2\}$ の間のトランスファー τ のコアの条件を得るために、前節で考察した IR・PO 条件を満たすトランスファー τ が、$S \subset \mathbb{N}$ によって改善されないための条件を確認しよう。PO 条件の議論と同様、改善する可能性のある部分集合 $S \subset \mathbb{N}$ は必ずいずれかのヴィクセル型三角形を含んでいなければればならない。したがって、改善する可能性のある $S \subset \mathbb{N}$ は、 $S_i^3 \equiv \{1,2_1,2_2,3_i\}$, $S_i^2 \equiv \{1,2_i,3_1,3_2\}$, $S_{ij}^{23} \equiv \{1,2_i,3_j\}(i,j=1,2)$ である。

$\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3_1,3_2\}$ の間のトランスファー $\tau=(a_1,a_2,b_1,b_2,b_1',b_2',c,c')$ に対して、まず $S_1^3=\{1,2_1,2_2,3_1\}$ による改善の可能性を考えよう。次のように

$$
\mu=(\mu_{11},\mu_{12},\mu_{211},\mu_{212},\mu_{221},\mu_{222},\mu_{31},\mu_{32})
$$

を、$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta_1', \gamma$ に対し、

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= a_1 + \varepsilon_1, & \mu_{12} &= a_2 + \varepsilon_2 \\ \mu_{211} &= b_1 + \delta_1, & \mu_{212} &= 0 \\ \mu_{221} &= b_1' + \delta_1', & \mu_{222} &= 0 \\ \mu_{31} &= c + \gamma, & \mu_{32} &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

と定めれば、μ がトランスファーであれば S_1^3 の間で実行可能であり、S_1^3 に属する各主体について、トランスファー μ と τ による消費配分の効用の差は、それぞれ

$$\begin{aligned} u_1(c^1(\mu)) - u_1(c^1(\tau)) &= (1 - a_1 - a_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) + 2(c + \gamma) \\ &\qquad - [(1 - a_1 - a_2) + 2(c + c')] \\ &= 2(\gamma - c') - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ u_{21}(c^{21}(\mu)) - u_{21}(c^{21}(\tau)) &= (1 - b_1 - \delta_1) + 2(a_1 + \varepsilon_1) \\ &\qquad - [(1 - b_1 - b_2) + 2a_1] \\ &= 2\varepsilon_1 + (b_2 - \delta_1) \\ u_{22}(c^{22}(\mu)) - u_{22}(c^{22}(\tau)) &= (1 - b_1' - \delta_1') + 2(a_2 + \varepsilon_2) \\ &\qquad - [(1 - b_1' - b_2') + 2a_2] \\ &= 2\varepsilon_2 + (b_2' - \delta_1') \\ u_{31}(c^{31}(\mu)) - u_{31}(c^{31}(\tau)) &= (1 - c - \gamma) + 2(b_1 + \delta_1 + b_1' + \delta_1') \\ &\qquad - [(1 - c) + 2(b_1 + b_1')] \\ &= 2(\delta_1 + \delta_1') - \gamma \end{aligned}$$

となる。したがって、S_1^3 に属する各主体の効用が改善する可能性については

$$\begin{aligned} u_1(c^1(\mu)) \geqq u_1(c^1(\tau)) &\Longleftrightarrow \gamma - c' \geqq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ u_{21}(c^{21}(\mu)) \geqq u_{21}(c^{21}(\tau)) &\Longleftrightarrow \varepsilon_1 \geqq \frac{1}{2}(\delta_1 - b_2) \\ u_{22}(c^{22}(\mu)) \geqq u_{22}(c^{22}(\tau)) &\Longleftrightarrow \varepsilon_2 \geqq \frac{1}{2}(\delta_1' - b_2') \\ u_{31}(c^{31}(\mu)) \geqq u_{31}(c^{31}(\tau)) &\Longleftrightarrow \delta_1 + \delta_1' \geqq \frac{1}{2}\gamma \end{aligned} \tag{27}$$

である。

(27) を $\gamma, \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \delta_1 + \delta_2$ の制約ごとに考察する。まず γ について考えると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned} 1 - c \geqq \gamma \quad &\geqq \quad c' + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \\ &\geqq \quad c' + \frac{1}{4}\left[(\delta_1 + \delta_1') - (b_2 + b_2')\right] \\ &\geqq \quad c' - \frac{1}{4}(b_2 + b_2') + \frac{1}{8}\gamma \end{aligned}$$

この関係から、$1-c \geqq \gamma \geqq \frac{8}{7}c' - \frac{2}{7}(b_2+b'_2)$ を満たす時に、μ によって S_1^3 に属する各主体の効用が改善可能になる。したがって、改善しないための条件として

$$\frac{2}{7}(b_2+b'_2) - \frac{1}{7}c' \leqq c + c' - 1 \tag{28}$$

同様の議論を $\varepsilon_1+\varepsilon_2, \delta_1+\delta_2$ に対して行うことで、S_1^3 に属する各主体の効用を μ によって改善されないための以下の条件を得る。

$$\frac{2}{7}(b_2+b'_2) - \frac{1}{7}c' \leqq \frac{a_1+a_2-1}{2} \tag{29}$$

$$\frac{2}{7}(b_2+b'_2) - \frac{1}{7}c' \leqq \frac{b_2+b'_2-1}{2} \tag{30}$$

同様の議論を S_2^3 に対して行うことで、μ によって改善出来ない以下の条件を得る。

$$\frac{2}{7}(b_1+b'_1) - \frac{1}{7}c \leqq c + c' - 1 \tag{31}$$

$$\frac{2}{7}(b_1+b'_1) - \frac{1}{7}c \leqq \frac{a_1+a_2-1}{2} \tag{32}$$

$$\frac{2}{7}(b_1+b'_1) - \frac{1}{7}c \leqq \frac{b_1+b'_1-1}{2} \tag{33}$$

つぎに $S_1^2 = \{1, 2_1, 3_1, 3_2\}$ によるトランスファー τ の改善の可能性を考えよう。$\varepsilon_1, \delta_1, \delta_2, \gamma, \gamma'$ に対し、次のように μ を、

$$\begin{aligned} \mu_{11} &= a_1+\varepsilon_1, & \mu_{12} &= 0 \\ \mu_{211} &= b_1+\delta_1, & \mu_{212} &= b_2+\delta_2 \\ \mu_{221} &= 0, & \mu_{222} &= 0 \\ \mu_{31} &= c+\gamma, & \mu_{32} &= c'+\gamma' \end{aligned} \tag{34}$$

と定めれば、μ がトランスファーであれば S_1^2 の間で実行可能であり、S_1^2 に属する各主体について、トランスファー μ と τ による消費配分の効用の差は、それぞれ

$$\begin{aligned} u_1(c^1(\mu)) - u_1(c^1(\tau)) &= (1-a_1-\varepsilon_1) + 2(c+c'+\gamma+\gamma') \\ &\quad - [(1-a_1-a_2) + 2(c+c')] \\ &= 2(\gamma+\gamma') - (\varepsilon_1 - a_2) \\ u_{21}(c^{21}(\mu)) - u_{21}(c^{21}(\tau)) &= (1-b_1-b_2-\delta_1-\delta_2) + 2(a_1+\varepsilon_1) \\ &\quad - [(1-b_1-b_2) + 2a_1] \\ &= 2\varepsilon_1 - (\delta_1+\delta_2) \\ u_{31}(c^{31}(\mu)) - u_{31}(c^{31}(\tau)) &= (1-c-\gamma) + 2(b_1+\delta_1) \\ &\quad - [(1-c) + 2(b_1+b'_1)] \\ &= 2(\delta_1 - b'_1) - \gamma \\ u_{32}(c^{32}(\mu)) - u_{32}(c^{32}(\tau)) &= (1-c'-\gamma') + 2(b_2+\delta_2) \\ &\quad - [(1-c') + 2(b_2+b'_2)] \\ &= 2(\delta_2 - b'_2) - \gamma' \end{aligned}$$

となる。したがって、S_1^2 に属する各主体の効用が改善する可能性については

$$\begin{aligned}u_1(c^1(\mu)) \geqq u_1(c^1(\tau)) &\Longleftrightarrow \gamma+\gamma' \geqq \frac{1}{2}(\varepsilon_1-a_2)\\ u_{21}(c^{21}(\mu)) \geqq u_{21}(c^{21}(\tau)) &\Longleftrightarrow \varepsilon_1 \geqq \frac{1}{2}(\delta_1+\delta_2)\\ u_{31}(c^{31}(\mu)) \geqq u_{31}(c^{31}(\tau)) &\Longleftrightarrow \delta_1-b_1' \geqq \frac{1}{2}\gamma\\ u_{32}(c^{32}(\mu)) \geqq u_{32}(c^{32}(\tau)) &\Longleftrightarrow \delta_2-b_2' \geqq \frac{1}{2}\gamma'\end{aligned} \tag{35}$$

である。

(35) を $\gamma+\gamma', \varepsilon_1, \delta_1+\delta_2$ の制約ごとに考察する。まず $\gamma+\gamma'$ について考えると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}(1-c)+(1-c') \geqq \gamma+\gamma' &\geqq \frac{1}{2}\varepsilon_1-\frac{1}{2}a_2\\ &\geqq \frac{1}{4}(\delta_1+\delta_2)-\frac{1}{2}a_2\\ &\geqq \frac{1}{4}(b_1'+b_2')+\frac{1}{8}(\gamma+\gamma')-\frac{1}{2}a_2\end{aligned}$$

この関係から、$(1-c)+(1-c') \geqq \gamma+\gamma' \geqq \frac{2}{7}(b_1'+b_2')-\frac{4}{7}a_2$ を満たす時に、μ によって S_1^2 に属する各主体の効用が改善可能になる。したがって、改善しないための条件として

$$2\left[\frac{2}{7}a_2-\frac{1}{7}(b_1'+b_2')\right] \leqq c+c'-2 \tag{36}$$

同様の議論を $\varepsilon_1, \delta_1+\delta_2$ に対して行うことで、S_2^3 に属する各主体の効用を μ によって改善されないための以下の条件を得る。

$$4\left[\frac{2}{7}a_2-\frac{1}{7}(b_1'+b_2')\right] \leqq a_1+a_2-1 \tag{37}$$

$$\frac{2}{7}a_2-\frac{1}{7}(b_1'+b_2') \leqq (b_1+b_1')+(b_2+b_2')-1 \tag{38}$$

同様の議論を S_2^2 に対して行うことで、μ によって改善出来ない以下の条件を得る。

$$2\left[\frac{2}{7}a_1-\frac{1}{7}(b_1'+b_2')\right] \leqq c+c'-2 \tag{39}$$

$$4\left[\frac{2}{7}a_1-\frac{1}{7}(b_1+b_2)\right] \leqq a_1+a_2-1 \tag{40}$$

$$\frac{2}{7}a_1-\frac{1}{7}(b_1+b_2) \leqq (b_1+b_1')+(b_2+b_2')-1 \tag{41}$$

最後に $S_{11}^{23}=\{1,2_1,3_1\}$ によるトランスファー τ の改善の可能性を考えよう。$\varepsilon_1, \delta_1, \gamma$ に対し、次のように μ を、

$$\begin{aligned}\mu_{11}=a_1+\varepsilon_1, &\qquad \mu_{12}=0\\ \mu_{211}=b_1+\delta_1, &\qquad \mu_{212}=0\\ \mu_{221}=0, &\qquad \mu_{222}=0\\ \mu_{31}=c+\gamma, &\qquad \mu_{32}=0\end{aligned} \tag{42}$$

と定めれば、μ がトランスファーであれば S_{11}^{23} の間で実行可能であり、S_{11}^{23} に属する各主体について、トランスファー μ と τ による消費配分の効用の差は、それぞれ

$$\begin{aligned}
u_1(c^1(\mu)) - u_1(c^1(\tau)) &= (1 - a_1 - \varepsilon_1) + 2(c + \gamma) \\
&\qquad - [(1 - a_1 - a_2) + 2(c + c')] \\
&= 2(\gamma - c') - (\varepsilon_1 - a_2) \\
u_{21}(c^{21}(\mu)) - u_{21}(c^{21}(\tau)) &= (1 - b_1 - \delta_1) + 2(a_1 + \varepsilon_1) \\
&\qquad - [(1 - b_1 - b_2) + 2a_1] \\
&= 2\varepsilon_1 - (\delta_1 - b_2) \\
u_{31}(c^{31}(\mu)) - u_{31}(c^{31}(\tau)) &= (1 - c - \gamma) + 2(b_1 + \delta_1) \\
&\qquad - [(1 - c) + 2(b_1 + b_1')] \\
&= 2(\delta_1 - b_1') - \gamma
\end{aligned}$$

となる。したがって、S_{11}^{23} に属する各主体の効用が改善する可能性については

$$\begin{aligned}
u_1(c^1(\mu)) \geqq u_1(c^1(\tau)) &\Longleftrightarrow \gamma - c' \geqq \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - a_2) \\
u_{21}(c^{21}(\mu)) \geqq u_{21}(c^{21}(\tau)) &\Longleftrightarrow \varepsilon_1 \geqq \frac{1}{2}(\delta_1 - b_2) \\
u_{31}(c^{31}(\mu)) \geqq u_{31}(c^{31}(\tau)) &\Longleftrightarrow \delta_1 - b_1' \geqq \frac{1}{2}\gamma
\end{aligned} \tag{43}$$

である。

(43) を $\gamma, \varepsilon_1, \delta_1$ の制約ごとに考察する。まず γ について考えると、以下のように変形できる。

$$\begin{aligned}
(1 - c) \geqq \gamma \quad &\geqq \quad (c' - \frac{1}{2}a_2) + \frac{1}{2}\varepsilon_1 \\
&\geqq \quad (c' - \frac{1}{2}a_2) + \frac{1}{4}(\delta_1 - b_2) \\
&\geqq \quad (c' - \frac{1}{2}a_2) + \frac{1}{4}(b_1' - b_2) + \frac{1}{8}\gamma
\end{aligned}$$

この関係から、$(1 - c) \geqq \gamma \geqq \frac{8}{7}(c' - \frac{1}{2}a_2) + \frac{2}{7}(b_1' - b_2)$ を満たす時に、μ によって S_{11}^{23} に属する各主体の効用が改善可能になる。したがって、改善しないための条件として

$$\frac{4}{7}a_2 - \frac{1}{7}c' + \frac{2}{7}(b_2 - b_1') \leqq c + c' - 1 \tag{44}$$

同様の議論を ε_1, δ_1 に対して行うことで、S_{11}^{23} に属する各主体の効用を μ によって改善されないための以下の条件を得る。

$$\frac{4}{7}a_2 - \frac{1}{7}c' + \frac{2}{7}(b_2 - b_1') \quad \leqq \quad \frac{a_1 + a_2 - 1}{2} \tag{45}$$

$$\frac{2}{7}a_2 - \frac{4}{7}c' + \frac{1}{7}(b_2 - b_1') \quad \leqq \quad b_1 + b_1' - 1 \tag{46}$$

同様の議論を $S^{23}_{12}, S^{23}_{21}, S^{23}_{22}$ に対して行うことで、μ によって改善出来ないための以下の条件を得る。S^{23}_{12} においては (47), (48), (49) のいずれかの条件を、S^{23}_{21} においては (50), (51), (52) のいずれかの条件を、S^{23}_{22} においては (53), (54), (55) のいずれかの条件を満たすことが、各部分集合に属する主体の効用が改善出来ないための条件になる。

$$\begin{aligned}
\frac{4}{7}a_2 - \frac{1}{7}c + \frac{2}{7}(b_1 - b'_2) &\leqq c + c' - 1 && (47)\\
\frac{4}{7}a_2 - \frac{1}{7}c + \frac{2}{7}(b_1 - b'_2) &\leqq \frac{a_1 + a_2 - 1}{2} && (48)\\
\frac{2}{7}a_2 - \frac{4}{7}c + \frac{1}{7}(b_1 - b'_2) &\leqq b_2 + b'_2 - 1 && (49)\\
\frac{4}{7}a_1 - \frac{1}{7}c' + \frac{2}{7}(b'_2 - b_1) &\leqq c + c' - 1 && (50)\\
\frac{4}{7}a_1 - \frac{1}{7}c' + \frac{2}{7}(b'_2 - b_1) &\leqq \frac{a_1 + a_2 - 1}{2} && (51)\\
\frac{2}{7}a_1 - \frac{4}{7}c' + \frac{1}{7}(b'_2 - b_1) &\leqq b_1 + b'_1 - 1 && (52)\\
\frac{4}{7}a_1 - \frac{1}{7}c + \frac{2}{7}(b'_1 - b_2) &\leqq c + c' - 1 && (53)\\
\frac{4}{7}a_1 - \frac{1}{7}c + \frac{2}{7}(b'_1 - b_2) &\leqq \frac{a_1 + a_2 - 1}{2} && (54)\\
\frac{2}{7}a_1 - \frac{4}{7}c + \frac{1}{7}(b'_1 - b_2) &\leqq b_2 + b'_2 - 1 && (55)
\end{aligned}$$

注 1 以上で議論したトランスファー μ における $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta_1, \delta'_1, \delta_2, \gamma, \gamma'$ は、**必ずしも正の値である必要はない**。以下で示す例のように、多くのトランスファーを与えているにもかかわらず、自らの財のトランスファーが少ないプレーヤーがいるときには、そのプレーヤーを排除する部分集合 $S \subset \mathbb{N}$ での取引を通じて、S 内の主体の効用は改善可能になる。

今、$\mathbb{N}$ の間のトランスファー τ として、IR 条件・PO 条件を満たす以下を考える。

$$\begin{aligned}
\tau &= (a_1, a_2, b_1, b_2, b'_1, b'_2, c, c')\\
&= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

この状況では、主体 $2_1, 2_2$ はともに主体 3_2 に対して、主体 3_1 より多くのトランスファーを与えている。しかし、主体 3_2 は主体 *1* に対して主体 3_1 より少ないトランスファーしか与えていない。主体 1 は主体 3 の二人から、*1* 人の主体が送ることができる最大のトランスファー *1* よりも多くの数量を獲得している。しかしこの状況で、主体 1 は自らのトランスファーを減らすことで、部分集合 $S^3_1 = \{1, 2_1, 2_2, 3_1\}$ によって改善可能になる。例えば

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\frac{1}{5}, \quad \delta_1 = \delta'_1 = \frac{1}{5}, \quad \gamma = \frac{1}{3}$$

とした μ によって改善される。

そこでトランスファー τ がコア・トランスファーである条件をパレート最適性の条件 (25) ごとに確認しよう。

ケースI： $a_1 + a_2 = 1$ の場合

(IA) $S_i^3 = \{1, 2_1, 2_2, 3_i\}$ $(i = 1, 2)$ による τ の改善の可能性

$a_1 + a_2 = 1$ より (32), (29) はそれぞれ

$$b_1 + b_1' \leqq \frac{1}{2}c \tag{56}$$

$$b_2 + b_2' \leqq \frac{1}{2}c' \tag{57}$$

となる。そこで $c + c'$ の値が 1 を上回るか否かにより場合を分けて考えよう。

まず、$\frac{1}{2} \leqq c + c' \leqq 1$ の場合は、

$$c + c' - 1 \leqq 0 = a_1 + a_2 - 1$$

より、(28) と (31) がそれぞれ成立すれば、それに対して (29) と (32) がそれぞれ成立することになる。ここで (29) と (30) の右辺の値、および (32) と (33) の右辺の値とをそれぞれ比較するため、$b_i + b_i'$ $(i = 1, 2)$ の値によって場合を細分化して考える。$0 \leqq b_1 + b_1' + b_2 + b_2' \leqq 2$ だから、三つの場合に細分化される。

(i) $b_i + b_i' \leqq 1$ $(i = 1, 2)$

(30) と (33) がそれぞれ成立すれば、(29) と (32) がそれぞれ成立することになるから、この場合、S_i^3 が改善できないための条件は (56) および (57) となる。この条件に主体 3_1 と 3_2 の IR 条件を加味することにより、S_i^3 $(i = 1, 2)$ が τ を改善出来ないための必要・十分条件は

$$b_1 + b_1' = \frac{1}{2}c \tag{58}$$

$$b_2 + b_2' = \frac{1}{2}c' \tag{59}$$

で与えられる。

(ii) $b_1 + b_1' > 1$ $(b_2 + b_2' \leqq 1)$

(30) と (32) がそれぞれ成立すれば、(29) と (33) がそれぞれ成立することになるから、この場合、S_i^3 が改善できないための条件は、主体 3_1 の IR 条件 $b_1 + b_1' \geqq \frac{1}{2}c$、および (59) と (33) となる。

(iii) $b_2 + b_2' > 1$ $(b_1 + b_1' \leqq 1)$

(29) と (33) がそれぞれ成立すれば、(30) と (32) がそれぞれ成立することになるから、この場合、S_i^3 が改善できないための条件は、主体 3_2 の IR 条件 $b_2 + b_2' \geqq \frac{1}{2}c'$、および (58) と (30) となる。

次に、$c + c' > 1$ の場合は、

$$a_1 + a_2 - 1 = 0 < c + c' - 1$$

より、(29) と (32) がそれぞれ成立すれば、(28) と (31) がそれぞれ成立することになる。上の議論と同様に、$b_i + b_i'$ $(i = 1, 2)$ の値によって三つの場合に細分化して考える。

(i) $b_i + b_i' \leqq 1$ $(i = 1, 2)$

(30) と (33) がそれぞれ成立すれば、(29) と (32) がそれぞれ成立することになるから、この場合、S_i^3 が改善できないための必要・十分条件は、(28) および (31) と、主体 3_1 と 3_2 の IR 条件、$b_1 + b_1' \geqq \frac{1}{2}c$, $b_2 + b_2' \geqq \frac{1}{2}c'$ で与えられる。

(ii) $b_1 + b_1' > 1$ ($b_2 + b_2' \leqq 1$)

(30) と (32) がそれぞれ成立すれば、(29) と (33) がそれぞれ成立することになるから、この場合、S_i^3 が改善できないための条件は、主体 3_1 の IR 条件 $b_1 + b_1' \geqq \frac{1}{2}c$ と (59)、および (28) と

$$\frac{2}{7}(b_1 + b_1') - \frac{1}{7}c \leqq \max\left\{c + c' - 1, \frac{b_1 + b_1' - 1}{2}\right\} \tag{60}$$

となる。

(iii) $b_2 + b_2' > 1$ ($b_1 + b_1' \leqq 1$)

(29) と (33) がそれぞれ成立すれば、(30) と (32) がそれぞれ成立することになるから、この場合、S_i^3 が改善できないための条件は、主体 3_2 の IR 条件 $b_2 + b_2' \geqq \frac{1}{2}c'$ と (58)、および (31) と

$$\frac{2}{7}(b_2 + b_2') - \frac{1}{7}c' \leqq \max\left\{c + c' - 1, \frac{b_2 + b_2' - 1}{2}\right\} \tag{61}$$

となる。

(IB) $S_i^2 = \{1, 2_i, 3_1, 3_2\}$ $(i = 1, 2)$ による τ の改善可能性:

$a_1 + a_2 = 1$ より (37), (40) は

$$\frac{2}{7}a_2 - \frac{1}{7}(b_1' + b_2') \leqq 0$$
$$\frac{2}{7}a_1 - \frac{1}{7}(b_1 + b_2) \leqq 0$$

となる。また $c + c' \leqq 2$ より、

$$c + c' - 2 \leqq 0 = a_1 + a_2 - 1$$

となることにより、(36) 及び (39) がそれぞれ成立すれば、それに対して (37) 及び (40) がそれぞれ成立することになる。したがって S_i^2 が改善できない条件として $a_1 + a_2 = 1$ の場合は (37), (38), (40), (41) を考慮すればよい。

そこで次に (38) と (41) を考える。$(b_1 + b_1') + (b_2 + b_2') \leqq 1$ の時には、(38) と (41) よりそれぞれ

$$2a_2 \leqq b_1' + b_2' \qquad 2a_1 \leqq b_1 + b_2$$

が成立する。この条件に主体 2_1 と 2_2 の IR 条件を加味することにより、

$$2a_2 = b_1' + b_2' \qquad 2a_1 = b_1 + b_2$$

が成立していないければならない。しかし、

$$2(a_1 + a_2) = 2 = b_1 + b_2 + b_1' + b_2' > 1$$

を意味するので、$(b_1 + b'_1) + (b_2 + b'_2) \leqq 1$ と矛盾する。したがって、$a_1 + a_2 = 1$ の場合には S_i^2 が τ を改善出来ないとすれば、

$$b_1 + b_2 + b'_1 + b'_2 > 1 \tag{62}$$

でなければならない。この条件によって、(37) の成立が (38) の成立を意味し、(40) の成立が (41) の成立を意味する。よって、S_1^2 が τ を改善出来ないための必要・十分条件は (38)、S_2^2 が τ を改善出来ないための必要・十分条件は (41) となる。

(IC) $S_{ij}^{23} = \{1, 2_i, 3_j\}$ $(i, j = 1, 2)$ による τ の改善可能性

注 2 より得られる $c + c' > 1$ と $a_1 + a_2 = 1$ を加味すると、

$$a_1 - a_2 - 1 = 0 < c + c' - 1$$

が得られるので、(45) の成立は (44) の成立を、(48) の成立は (47) の成立を、(51) の成立は (50) の成立を、(54) の成立は (53) の成立を意味する。よって、(44), (46), (47), (49), (50), (52), (53), (55) の条件を考察すればよい。

ケース II： $b_1 + b_2 = b'_1 + b'_2 = 1$ の場合

タイプ 2 の主体の IR の条件から、

$$a_1 = a_2 = \frac{1}{2} \tag{63}$$

であり、$a_1 + a_2 = 1$ となる。これは**ケース I** に含まれる。

ケース III： $c = c' = 1$ の場合

(IIIA) $S_i^3 = \{1, 2_1, 2_2, 3_i\}$ $(i = 1, 2)$ による τ の改善可能性

$c + c' = 2$ より

$$\frac{a_1 + a_2 - 1}{2} \leqq 0 < c + c' - 1 = 1$$

となるので、(29) 及び (32) の成立は、(28) 及び (31) の成立それぞれを意味する。したがって、S_i^3 が改善できない条件として $c + c' = 2$ の場合は (28), (30), (31), (33) を考慮すればよい。

そこで次に、(30) と (33) を考える。$c = c' = 1$ を代入すると、(30) と (33) はそれぞれ

$$\frac{5}{3} \leqq (b_2 + b'_2), \qquad \frac{5}{3} \leqq (b_1 + b'_1) \tag{64}$$

となる。上記の式の一方と主体 3 の IR 条件を考慮して得られる式において、$(b_1 + b'_1) + (b_2 + b'_2) \geqq \frac{13}{6} > 2$ となり成立しえない。(28) 及び (31) は常に成立するので、$c = c' = 1$ の時に S_i^3 に属する主体の効用を μ を通じて改善するための条件は、すべての主体が IR 条件をみたすことである。

(IIIB) $S_i^2 = \{1, 2_i, 3_1, 3_2\}$ $(i = 1, 2)$ によるトランスファー τ の改善の可能性

$c = c' = 1$ より (36), (39) は

$$\frac{2}{7}a_2 - \frac{1}{7}(b'_1 + b'_2) \leqq 0$$
$$\frac{2}{7}a_1 - \frac{1}{7}(b_1 + b_2) \leqq 0$$

となる。また $a_1 + a_2 \leqq 1$ より、

$$\frac{a_1 + a_2 - 1}{4} \leqq 0 = \frac{c + c' - 2}{2}$$

となることにより、(37) 及び (40) がそれぞれ成立すれば、それに対して (36) 及び (39) がそれぞれ成立することになる。したがって S_i^2 が改善できない条件として $c = c' = 1$ の場合は (36), (38), (39), (41) を考慮すればよい。

そこで次に (38) と (41) を考える。$(b_1 + b'_1) + (b_2 + b'_2) \leqq 1$ の時には、(38) と (41) よりそれぞれ

$$2a_2 \leqq b'_1 + b'_2 \qquad 2a_1 \leqq b_1 + b_2$$

が成立する。この条件に主体 2_1 と 2_2 の IR 条件を加味することにより、

$$2a_2 = b'_1 + b'_2 \qquad 2a_1 = b_1 + b_2$$

が成立していないければならない。しかし、この時には (36), (38), (39), (41) が恒等式となるので、IR 条件のみを考慮すればよい。

$(b_1 + b'_1) + (b_2 + b'_2) > 1$ の時には (28) と (31) の成立がそれぞれ (30) と (33) の成立を意味するので、(30) と (33) が S_i^2 のメンバーが τ を改善されないための必要・十分条件になる。

(IIIC) $S_{ij}^{23} = \{1, 2_i, 3_j\}$ $(i, j = 1, 2)$ による τ の改善の可能性

(44), (45) について考える。

$$\max\left\{c + c' - 1, \frac{a_1 + a_2 - 1}{2}\right\} = c + c' - 1 = 1$$

を得る。したがって（45）が成立している時 (44) の成立を意味するので、(44) を条件として考えればよい。同様のことが、(47), (50), (53) においても言える。このことより、考察する条件は、(44), (46), (47), (49), (50), (52), (53), (55) になる。これはケース (IC) とに帰着できる。

5　取引ネットワーク間のレプリカ型競争

5.1　ヴィクセル型三角形間の競争

本節では、取引主体の利用可能なヴィクセル型三角形の取引ネットワークが、各取引主体間で差異のないような状況を考え、言わば、各主体が置かれた競争的立場に差異がないよう

な競争を分析する。言い換えると、基本モデルにおける取引主体 $i,\ i=1,2,3,$ がそれぞれ同数存在して、それぞれの取引主体にとって「独立した」ヴィクセル型三角形内での取引が可能となるようなネットワークが複数存在する状況を考察し、そこでの財や資産の移転の結果が十分な競争性を生み出しているか否かを分析する。基本となる取引主体が同数増加するような競争だから、**レプリカ型競争**とよぶことにする。

そこで取引主体の集合 $\mathbb{N}$ を本節では

$$\mathbb{N}=\{1_1,1_2,2_1,2_2,3_1,3_2\}$$

とし、取引主体 $i_j,\ i=1,2,3,\ j=1,2,$ の効用関数は $u_{ij}=u_i$、また、i_j の初期保有量ベクトルは $e_{ij}=e_i$ として分析を進めることになる。つまり、基本モデルにおける取引主体 $i,\ i=1,2,3,$ がそれぞれ二人になり、$i_j,\ j=1,2,$ と表され、それぞれ全く同一の効用関数と初期保有量ベクトルを持つものとする。

$\mathbb{N}$ の間のトランスファー τ を

$$\tau=(\tau_{ijk});i=1,2,3;j=1,2;k=1,2$$

と書くことにする。τ_{ijk} は取引主体 i_j から $(i+1)k$ へのトランスファーの数量である。図1や図2と同様に $\mathbb{N}=\{1_1,1_2,2_1,2_2,3_1,3_2\}$ の間のトランスファー τ を図示したのが図4である。

$\mathbb{N}$ の間でトランスファー τ が行われると、取引主体 $i_j,\ i=1,2,3,\ j=1,2,$ の消費ベクトル $c^{ij}(\tau)$ による効用水準は

$$u_{ij}\left(c^{ij}(\tau)\right)=\left(1-\sum_{k=1,2}\tau_{ijk}\right)+2\sum_{k=1,2}\tau_{(i-1)ki_j}$$

となる。

$\mathbb{N}=\{1,2,3\}$ の場合の基本的トランスファー・モデルにおいては、ヴィクセル型三角形は一つのみで、取引主体間の競争といっても、実質的には三人の間の話し合いの結果がいかなる配分になるかということに等しいため、コア・トランスファーとなるトランスファーの範囲は非常に広いものとなった。

第3節の $\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3\}$ の場合のトランスファー・モデルでは、取引主体2が二人いるため、主体間のトランスファーを行うことができるヴィクセル型三角形が二つできることから、基本モデルのトランスファーと比べ、取引主体間の競争が生まれ、コア・トランスファーの範囲がより狭くなるが、取引主体1と3は、財・資産のトランスファーにおいて、言わば「独占的」なポジションを占めるため、ヴィクセル型三角形で示されるネットワーク間の競争は極めて限定されたものとなってしまった。さらに第4節の $\mathbb{N}=\{1,2_1,2_2,3_1,3_2\}$ の場合のトランスファー・モデルでは、取引主体2と3の双方が二人で、主体間のトランスファーを行うことができるヴィクセル型三角形が四つできることから、第3節のトランスファーと比べ、取引主体間の競争がより活発化し、コア・トランスファーの範囲がさらに狭くなるが、取引主体1については、第3節の場合と同様に、財・資産のトランスファーにおいて「独占的」な地位を占めるため、ヴィクセル型三角形で示されるネットワーク間の競争は未だ限定的であった。

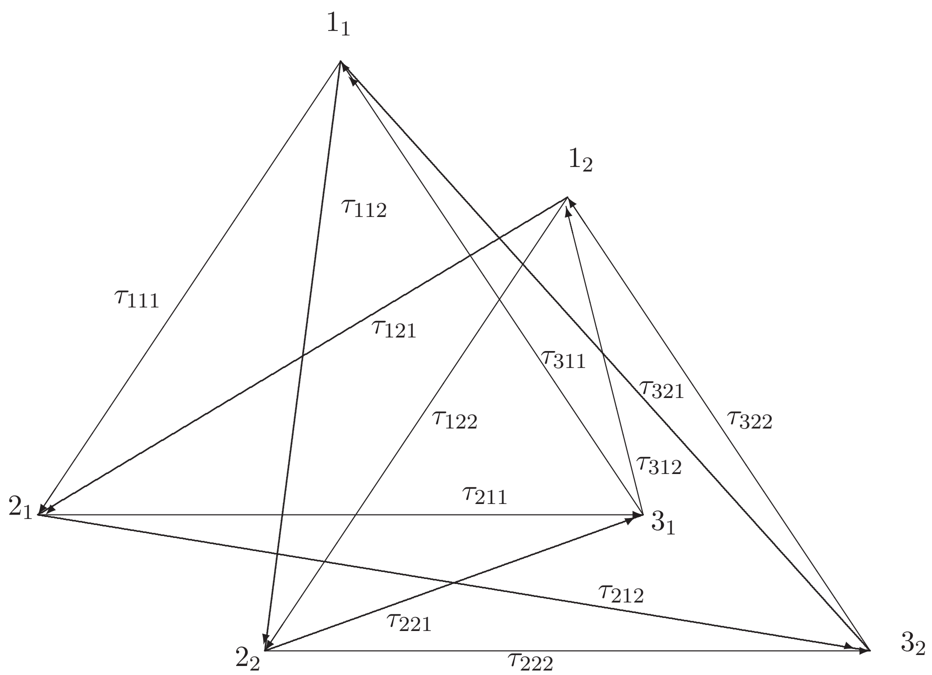

図 4: レプリカ型競争における $\mathbb{N} = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の間のトランスファー $\tau = (\tau_{ijk})$; $i = 1,2,3$; $j = 1,2$; $k = 1,2$

本節では、$\mathbb{N} = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の場合のトランスファー・モデルであることから、各取引主体が二人いて、三人の各主体について競争相手が存在し、ヴィクセル型三角形が示すトランスファーのネットワークは一挙に八通りに増えることになる。この結果トランスファーを行うネットワーク間での実質的競争が生まれ、コア・トランスファーで示される競争が生むトランスファーの結果を、大幅に限定できることが予想される。

以下では便宜上、取引主体 i_j, $j = 1,2$, をタイプ i の取引主体とよぶことにし、トランスファー $\tau = (\tau_{ijk})$ に対し、各 $i = 1,2,3$ について、

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1,2} \tau_{ijk}$$
$$\tau_i = \sum_{j=1,2} \tau_{ij} = \sum_{j,k=1,2} \tau_{ijk}$$

によって τ_{ij} と τ_i を定める。

5.2　コア・トランスファーの条件

個人合理性を示す IR の条件は、基本モデルにおける IR 条件と全く同じである。パレート最適性 (PO) の条件は、基本モデルにおけるトランスファーの場合のパレート最適性の条件の拡張として、つぎに述べる結果となる。

命題 5.1 $\mathbb{N} = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の間のトランスファー $\tau = (\tau_{ijk});\ i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2$ がパレート最適となる必要十分条件は、

$$(\exists i \in \{1,2,3\})(\forall j \in \{1,2\})\ \tau_{ij} = 1$$

で与えられる。

換言すると、取引主体のうち少なくともあるタイプの主体が保有している財・資産をすべて他の主体にトランスファーしていなければ、取引主体全体が改善できる可能性が存在する。

実際、トランスファー $\tau = (\tau_{ijk});\ i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2$ がパレート最適であるとし、命題 5.1 の条件が満たされなかったとしよう。そうすると、どのような $i \in \{1,2,3\}$ についても $\tau_{ij} < 1$ となる $j \in \{1,2\}$ があることになる。一般性を失うことなく、各 $i \in \{1,2,3\}$ について $\tau_{i1} < 1$ だとする。ここで

$$\varepsilon = \min\{1 - \tau_{i1} | \, i = 1,2,3\}$$

とし、トランスファー $\mu = (\mu_{ijk});\ i = 1,2,3;\ j = 1,2;\ k = 1,2,$ をつぎのように定める。

$$\mu_{ijk} = \begin{cases} \tau_{ijk} + \varepsilon, & j,k = 1 \text{ の場合} \\ \tau_{ijk} & \text{それ以外の } ijk \text{ の場合} \end{cases}$$

とする。そうすると各 $i \in \{1,2,3\}$ について、

$$\begin{aligned} & u_{i1}(c^{i1}(\mu)) - u_{i1}(c^{i1}(\tau)) \\ & = 1 - \left(\sum_{k=1,2} \tau_{i1k} + \varepsilon \right) + 2 \left(\sum_{k=1,2} \tau_{(i-1)k1} + \varepsilon \right) \\ & \qquad - \left(1 - \sum_{k=1,2} \tau_{i1k} + 2 \sum_{k=1,2} \tau_{(i-1)k1} \right) \\ & = \varepsilon > 0 \end{aligned}$$

であり、それ以外の ijk の場合には、

$$u_{ij}(c^{ij}(\mu)) = u_{ij}(c^{ij}(\tau))$$

となるから、μ により $\mathbb{N}$ は τ を改善することになり、τ がパレート最適であったことに反する。よって、τ がパレート最適であれば、命題 5.1 の条件が満たされなければならない。

ついでこの条件がパレート最適であるための十分条件でもあることを示そう。便宜上、タイプ i の取引主体の効用の和を示す記号として、任意のトランスファー μ に対し

$$u_i(c^i(\mu)) = \sum_{j=1,2} u_{ij}(c^{ij}(\mu)),\ c^i(\mu) = (c^{i1}(\mu), c^{i2}(\mu)),$$

を定める。

いま、$\mathbb{N}$ におけるトランスファー τ が命題 5.1 の条件を満たしているとしよう。このとき、任意のトランスファー μ と τ による消費配分の効用の差を、取引主体の各タイプ $i \in \{1,2,3\}$ ごとの効用の和について求めると、

$$\begin{aligned} &u_i(c^i(\mu)) - u_i(c^i(\tau)) \\ &\qquad = \sum_{j=1,2} ((1-\mu_{ij}) - (1-\tau_{ij})) + 2 \sum_{j,k=1,2} \left(\mu_{(i-1)jk} - \tau_{(i-1)jk}\right) \\ &\qquad = (\tau_i - \mu_i) + 2\left(\mu_{(i-1)} - \tau_{(i-1)}\right) \end{aligned} \tag{65}$$

となる。

仮に $\mathbb{N}$ が、あるトランスファー μ によってトランスファー τ を改善できるとすると、すべての $i \in \{1,2,3\}, j \in \{1,2\}$ について

$$\begin{aligned} &u_{ij}(c^{ij}(\mu)) - u_{ij}(c^{ij}(\tau)) \\ &\qquad = (\tau_{ij} - \mu_{ij}) + 2\left(\mu_{(i-1)jk} - \tau_{(i-1)jk}\right) \geqq 0 \end{aligned} \tag{66}$$

であり、これらの不等式の少なくとも一つについて、厳密な不等号が成り立つ。(65) および (66) 式より、すべての $i \in \{1,2,3\}$ について不等式

$$\tau_i - \mu_i \geqq 2\left(\tau_{(i-1)} - \mu_{(i-1)}\right) \tag{67}$$

が成立し、このうちの少なくとも一つについて厳密な不等号が成立する。ここでトランスファー τ は命題 5.1 の条件を満たしているから、一般性を失うことなく、$\tau_1 = 1$ とする。

そこで、上の不等式 (67) を左辺の i について $i = 1,3,2$ の順に適用すると、厳密な不等式

$$\tau_1 - \mu_1 > 8(\tau_1 - \mu_1) \tag{68}$$

が成立しなければならない。しかし、$1 = \tau_1 \geqq \mu_1$ より $\tau_1 - \mu_1 > 0$ または $\tau_1 - \mu_1 = 0$ だが、いずれの場合も不等式 (68) と矛盾する。

ゆえに、$\mathbb{N}$ におけるトランスファー τ が命題 5.1 の条件を満たすならばパレート最適である。 □

以下では $S \subset \mathbb{N}$ が与えられたトランスファー τ を改善することができない条件を考察する。考察の対象となる $S \subset \mathbb{N}$ は少なくともすべてのタイプの取引主体 1 人を含んでいなければならないことは、前節までの場合と同じである。S がすべてのタイプの取引主体を含んでいなければ、各自、自らが保有する財・資源が与える効用以上の効用を実現する財・資産の移転ができないからである。

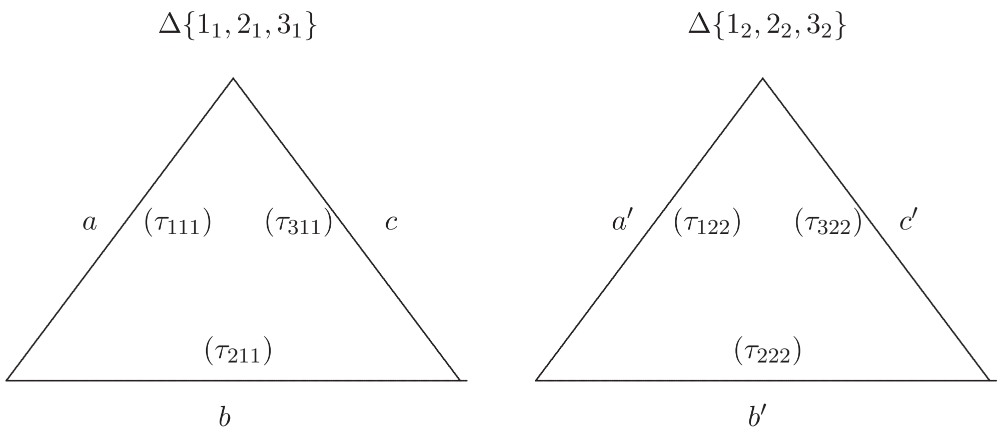

図 5: レプリカ型競争におけるトランスファー $\tau = (\tau_{ijk}); i = 1, 2, 3; j = 1, 2; k = 1, 2,$ の簡略化した図

各取引主体は同タイプの主体の双方に同時にトランスファーをすることができるが、まず、どちらか一方の主体にのみトランスファーを行っていて、さらに各取引主体 i_j がトランスファーを受ける相手と送る相手はそれぞれ一人のみ存在する場合を考察する。具体的にはトランスファー τ が

$$(\forall i = 1, 2, 3)(\forall j = 1, 2)\ \tau_{ijk}\tau_{ijk'} = 0,\ k \neq k' \tag{69}$$

を満足し、互いに独立したヴィクセル型三角形内でトランスファーが実行される場合を考察する。

この場合はヴィクセル型三角形が示すトランスファーのネットワークが二つ独立に財・資産の移転を行っているから、これら二つの三角形を図 5 のように移転の方向を示さずに簡略化して描き、一般性を失うことなく左右の三角形を、それぞれ $\Delta\{1_1, 2_1, 3_1\}$ と $\Delta\{1_2, 2_2, 3_2\}$ とする。また以下の議論では記号も簡略化して、トランスファー $\tau = (\tau_{ijk}); i = 1, 2, 3; j = 1, 2; k = 1, 2,$ における $\tau_{111}, \tau_{211}, \tau_{311}$ の値を a, b, c、$\tau_{122}, \tau_{222}, \tau_{322}$ の値をそれぞれ a', b', c' で表し、これら以外の $\tau_{ijk} = 0$ としよう。三角形 $\Delta\{1_1, 2_1, 3_1\}$ に限定したトランスファーが a, b, c であり、$\Delta\{1_2, 2_2, 3_2\}$ に限定したトランスファーが a', b', c' である。

最初に

$$a = a' \text{ ならば } b = b',\ c = c' \tag{70}$$

が成立しなければ τ を改善できる $S \subset \mathbb{N}$ が存在することを示そう。

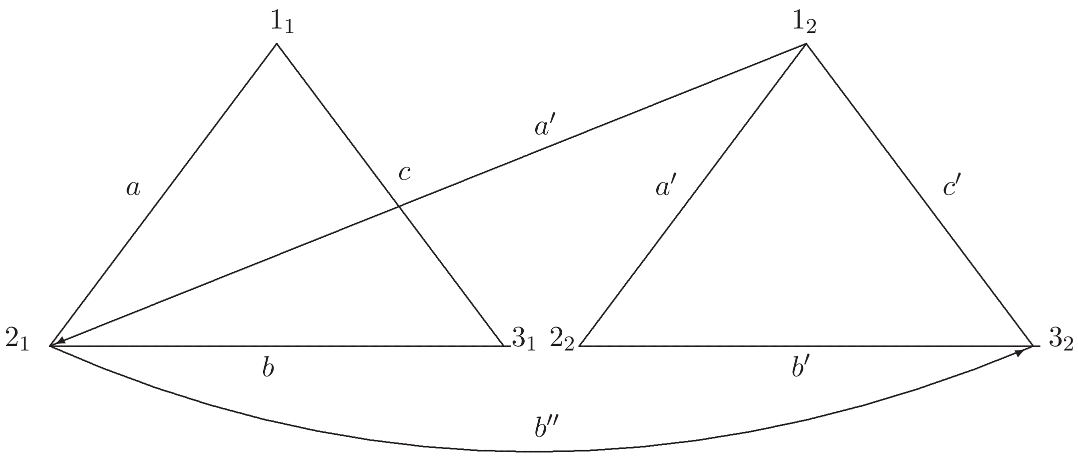

図 6: $\{1_2, 2_1, 3_2\}$ による τ の改善

$a = a'$ とする。このとき $b > b'$ ならば、$b > b'' > b'$ を満たす b'' をとり、図 6 の簡略図で示されるトランスファー μ を

$$\mu_{121} = a', \mu_{212} = b'', \mu_{322} = c'$$

とし、その他の $\mu_{ijk} = 0$ によって定める。そうすると $\{1_2, 2_1, 3_2\}$ は μ により τ を改善する。実際、μ により消費ベクトルの効用はそれぞれの主体にとって

$$\begin{aligned}
u_{12}(c^{12}(\mu)) &= 1 - a' + 2c' = u_{12}(c^{12}(\tau)) \\
u_{21}(c^{21}(\mu)) &= 1 - b'' + 2a' > 1 - b' + 2a' = u_{21}(c^{21}(\tau)) \\
u_{32}(c^{32}(\mu)) &= 1 - c' + 2b'' > 1 - c' + 2b' = u_{32}(c^{32}(\tau))
\end{aligned}$$

となっている。よって、$b = b'$ でなければならない。

つぎに、$c > c'$ だったとしよう。$b = b'$ でなければならなかったから、$c > c'' > c'$ をとり、トランスファー μ を図 7 におけるように

$$\mu_{122} = a', \mu_{221} = b', \mu_{312} = c''$$

で、その他の $\mu_{ijk} = 0$ によって定めると、

$$\begin{aligned}
u_{12}(c^{12}(\mu)) &= 1 - a' + 2c'' > 1 - a' + 2c' = u_{12}(c^{12}(\tau)) \\
u_{22}(c^{22}(\mu)) &= 1 - b' + 2a' = u_{22}(c^{22}(\tau)) \\
u_{31}(c^{31}(\mu)) &= 1 - c'' + 2b' > 1 - c + 2b = u_{31}(c^{31}(\tau))
\end{aligned}$$

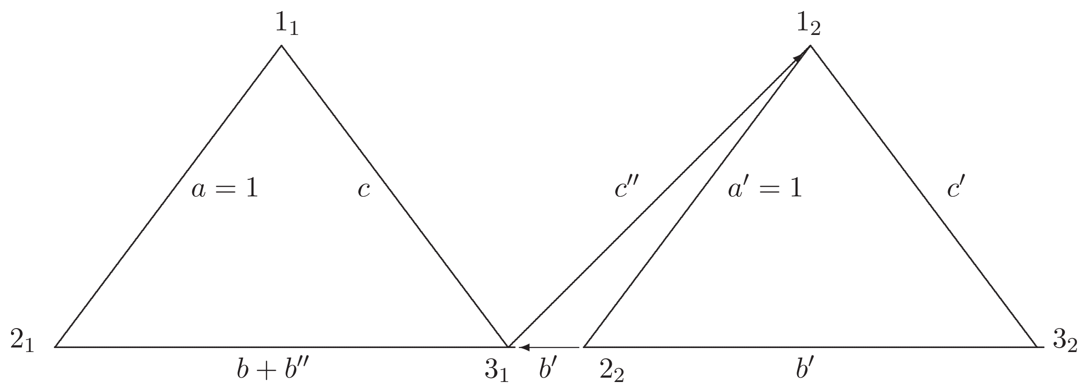

図 7: $\{1_2, 2_2, 3_1\}$ による τ の改善

となり μ により $\{1_2, 2_2, 3_1\}$ は τ を改善する。よって、$c = c'$ でなければならない。故に (70) が成立する。

　上の議論は、$a = a'$ を前提として出発しても、あるいは $b = b'$ または $c = c'$ を前提としても成立するから、つぎの命題を示したことになる。

命題 5.2 $\mathbb{N} = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の間のトランスファー τ が条件

$$(\forall i, j)\tau_{ijk}\tau_{ijk'} = 0,\ k \neq k'$$

を満たし、互いに独立したヴィクセル型三角形内でトランスファーが実行される場合、τ がコア・トランスファーであれば

$$(\forall i \in \{1, 2, 3\})\tau_{ijk} = \tau_{ij'k'},\ for\ j \neq j', k \neq k'$$

が成立する。

　命題 5.2 において得られた条件とトランスファーが PO 条件を満たすことから、コア・トランスファーが満たすべき条件をさらに特定化しよう。

　今、トランスファー τ はコア・トランスファーだとし、図 8 の a, b, c, a', b', c' はこのトランスファー τ を表すものとする。トランスファーが PO を満たすと、$a = a' = 1,\ b = b' =$

1, $c = c' = 1$、のうちの少なくとも 1 つは成立しなければならない。そこで、$a = a' = 1$ の場合に、b, b', c, c' の値にどのような制約が加わるかを以下で確認しよう。

$a = a' = 1$ とする。トランスファー μ を図 8 におけるように、

$$\mu_{111} = a,\ \mu_{121} = a'',\ \mu_{211} = b + b'',$$
$$\mu_{311} = c,\ \mu_{312} = c'',$$

それ以外の ijk について

$$\mu_{ijk} = 0$$

とする。このとき、主体 1_1 については、トランスファー μ の定め方から、

$$u_{11}(c^{11}(\mu)) = u_{11}(c^{11}(\tau))$$

である。また、1_2、2_1、3_1 の各主体について、トランスファー μ と τ による消費配分の効用の差は、それぞれ

$$u_{12}(c^{12}(\mu)) - u_{12}(c^{12}(\tau)) = 1 - a'' + 2c'' - 2c \tag{71}$$
$$\begin{aligned} u_{21}(c^{21}(\mu)) - u_{21}(c^{21}(\tau)) &= 1 - (b + b'') + 2(a + a'') - (1 - b + 2a) \\ &= 2a'' - b'', \end{aligned} \tag{72}$$
$$\begin{aligned} u_{31}(c^{31}(\mu)) - u_{31}(c^{31}(\tau)) &= 1 - (c + c'') + 2(b + b'') - (1 - c + 2b) \\ &= 2b'' - c'' \end{aligned} \tag{73}$$

となる。

$b \neq 1, c \neq 1$ とし、a'', b'', c'' の値を、b'', c'', a'' の順につぎのように定める。最初に

$$b'' = \min\left\{1 - b, \frac{1 - c}{2}\right\} > 0$$

とし、ついで

$$c'' = 2b'' = \begin{cases} 2(1 - b), & b'' = 1 - b \text{ の場合} \\ 1 - c, & b'' = \dfrac{1 - c}{2} \text{ の場合} \end{cases}$$

によって c'' の値を定めると、

$$u_{31}(c^{31}(\mu)) = u_{31}(c^{31}(\tau)) \tag{74}$$

となる。さらに、a'' の値を

$$a'' = \frac{1}{2}b'' = \begin{cases} \dfrac{1 - b}{2}, & \text{b"=1-b の場合} \\ \dfrac{1 - c}{4}, & b'' = \dfrac{1 - c}{2} \text{ の場合} \end{cases}$$

によって定めれば、

$$u_{21}(c^{21}(\mu)) = u_{21}(c^{21}(\tau)) \tag{75}$$

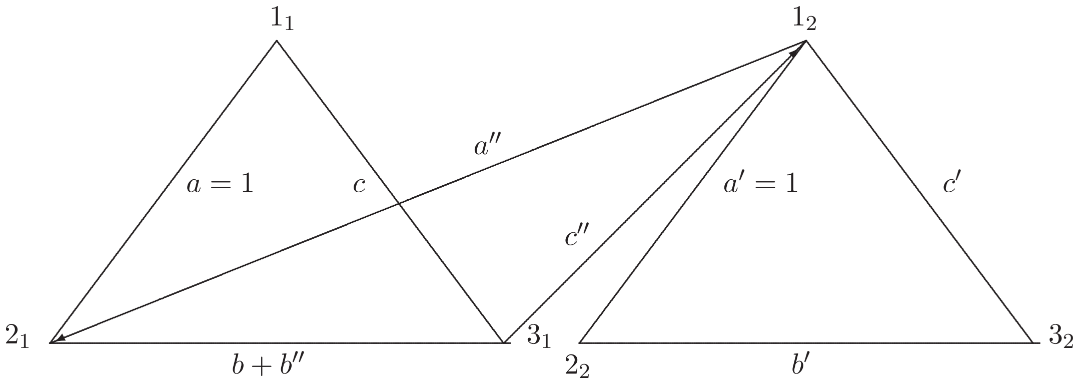

図 8: $\{1_1, 1_2, 2_1, 3_1\}$ による改善可能性

となり、さらに、主体 1_2 について

$$\begin{aligned} u_{12}(c^{12}(\mu)) - u_{12}(c^{12}(\tau)) &= 1 - a'' + 2c'' - 2c \\ &= \frac{7}{2}b'' - 2c + 1 \end{aligned} \tag{76}$$

となる。ここで $\dfrac{1-c}{2} \geqq 1-b$、つまり、$c \leqq 2b-1$ のときは、$b'' = 1-b$ だから、

$$\begin{aligned} u_{12}(c^{12}(\mu)) - u_{12}(c^{12}(\tau)) &= \frac{7}{2}b'' - 2c + 1 \\ &= -\frac{7}{2}b - 2c + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

であり、したがって、

$$\begin{aligned} u_{12}(c^{12}(\mu)) - &u_{12}(c^{12}(\tau)) > 0 \\ &\iff c < -\frac{7}{4}b + \frac{9}{4} \text{ および } c \leqq 2b-1 \end{aligned} \tag{77}$$

となる。

また、$\dfrac{1-c}{2} < 1-b$、つまり、$c > 2b-1$ のときは、$b'' = \dfrac{1-c}{2}$ だから、

$$\begin{aligned} u_{12}(c^{12}(\mu)) - u_{12}(c^{12}(\tau)) &= \frac{7}{2}b'' - 2c + 1 \\ &= -\frac{15}{4}c + \frac{11}{4} \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} u_{12}(c^{12}(\mu)) - &u_{12}(c^{12}(\tau)) > 0 \\ &\iff c < \frac{11}{15} \text{ および } c > 2b-1 \end{aligned} \tag{78}$$

となる。

したがって、$b \neq 1, c \neq 1$ のとき、(77) あるいは (78) が成立すれば、$\{1_1, 1_2, 2_1, 3_1\}$ はトランスファー τ をトランスファー μ によって改善できることになる。以上の議論から、τ がコア・トランスファーであれば、(77) および (78) が成立しないことから、コア・トランスファーであるための条件として、$b \neq 1, c \neq 1$ のとき、

$$\begin{aligned} (b,c) \in [0,1)^2 \text{ が } c \leqq 2b-1 \text{ の範囲では、} \quad & c \geqq -\frac{7}{4}b + \frac{9}{4} \\ (b,c) \in [0,1)^2 \text{ が } c > 2b-1 \text{ の範囲では、} \quad & c \geqq \frac{11}{15} \end{aligned}$$

を得る。

また、$b = 1, c \neq 1$ のときは、$c \geqq (1/2)b$ であれば改善されず、$b \neq 1, c = 1$ のときは、$c \geqq 1/2$ であれば改善されないことが確かめられるので、結局、コア・トランスファーであるための条件として、

$$(b,c) \in [0,1]^2 \text{ が } c \leqq 2b-1 \text{ の範囲では、} \quad c \geqq -\frac{7}{4}b + \frac{9}{4} \tag{79}$$

$$(b,c) \in [0,1]^2 \text{ が } c > 2b-1 \text{ の範囲では、} \quad c \geqq \frac{11}{15} \tag{80}$$

を得る。図 9 において、(79) 式が示す範囲は図中の △△△△△ ▽▽▽▽▽ の領域で示されており、(80) 式が示す範囲は図中の ○○○○○○ ○○○○○○ の領域で示されている。[6)]

以上の議論をまとめると、つぎの命題を得る。

命題 5.3 $\mathbb{N} = \{1_1, 1_2, 2_1, 2_2, 3_1, 3_2\}$ の間のトランスファー τ が条件

$$(\forall i, j)\tau_{ijk}\tau_{ijk'} = 0,\ k \neq k'$$

6) この議論において $b = b'$ の値が 13/15 を上回っているとき、主体 $3_1, 3_2$ のレントが大きくなり得る傾向が排除されてないように見える。そこで上の議論における a'', b'', c'' の値を c'' の値をベースに考え、トランスファー τ の改善の可能性を考えて、

$$c'' = \min\{2(1-b), 1-c\}$$

とし、

$$b'' = \frac{1}{2}c'', \quad a'' = \frac{1}{2}b'' = \frac{1}{4}c''$$

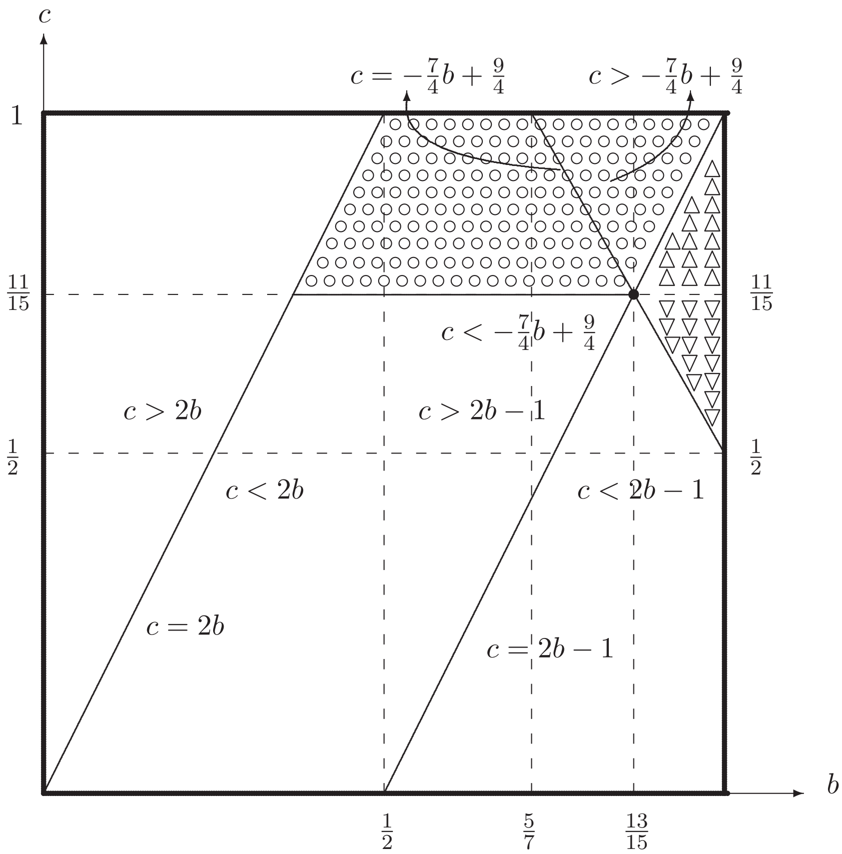

図 9: コア・トランスファー τ の (b, c) の値の範囲 ($a = a' = 1$ の場合)

を満たし、互いに独立したヴィクセル型三角形内でトランスファーが実行される場合、τ が

によって b'' と a'' とを定めれば、上の議論におけるトランスファー μ について、(72) と (73) 式から、(74) と (75) とが成立し、(76) 式から

$$\begin{aligned} u_{12}(c^{12}(\mu)) - u_{12}(c^{12}(\tau)) &= 1 - a'' + 2c'' - 2c \\ &= \frac{7}{4}c'' - 2c + 1 \end{aligned}$$

を得る。$c \leqq 2b - 1$ の場合、$c'' = 2(1 - b)$ であり、$c > 2b - 1$ の場合、$c'' = 1 - c$ だから、

$$u_{12}(c^{12}(\mu)) - u_{12}(c^{12}(\tau)) = \begin{cases} -2\left(c + \frac{7}{4}b - \frac{9}{4}\right), & c \leqq 2b - 1 \text{ の場合} \\ -\frac{15}{4}\left(c - \frac{11}{15}\right), & c > 2b - 1 \text{ の場合} \end{cases}$$

となる。これより (77) 式と (78) 式とを得るから、コア・トランスファーの条件としては、先の議論と同様に (79) 式と (80) 式となる。

コア・トランスファーであれば、ある $i \in \{1,2,3\}$ に対し、$j \neq j', k \neq k'$ について

$$\tau_{ijk} = \tau_{ij'k'} = 1, \quad \tau_{(i-1)jk} = \tau_{ij'k'}, \quad \tau_{(i+1)jk} = \tau_{ij'k'}$$

$$\tau_{(i-1)jk} \leqq 2\tau_{ij'k'} - 1 \text{ の範囲では、} \quad \tau_{(i-1)jk} \geqq -\frac{7}{4}\tau_{ij'k'} + \frac{9}{4}$$

$$\tau_{(i-1)jk} > 2\tau_{ij'k'} - 1 \text{ の範囲では、} \quad \tau_{(i-1)jk} \geqq \frac{11}{15}$$

でなければならない。

6　おわりに

本稿では、資産や財のトランスファーに関するヴィクセルの三角形型モデルを用いて、エッジワース流のゲームのコア概念によって表現された取引者間の競争が、最終的なトランスファーの結果にどのような影響を与えるのか分析した。

第 2 節では、トランスファーの具体的な基本的モデルとして、異なる三種類の資産あるいは財及び、効用関数と初期保有ベクトルによって表現される三人の異なる取引主体から構成される経済モデルを提示した。そして、トランスファーがコア・トランスファーとなる必要・十分条件 (命題 2.2) を明らかにした。各主体の競争相手がいない基本モデルにおけるコア・トランスファーは、少なくとも一人の主体が所持する財の総量をすべて他の主体に移転していれば、他の主体は最低限各主体が個人合理性を満たす範囲の移転をしていればよいというものであり、コア・トランスファーとなるトランスファーの範囲は非常に広いものとなる。すべての主体が所持する財の総量をすべて他の主体に移転するという状況から、財の総量をすべて他の主体に移転した主体が他の主体からは総量の四分の一だけ受け取り、個人合理性がぎりぎり満たされるに過ぎず、特定の主体に大きなレントが発生してしまうという状況までもが結果として生じ得るのである。

そこで第 3 節では、基本的トランスファー・モデルに取引主体 2 の競争相手を一人導入した競争的なモデルを分析し、命題 3.2 においてコア・トランスファーの必要・十分条件を明らかにした。この命題は基本モデルにおける命題 2.2 と比べて、取引主体 2 の競争相手が一人増えることにより、タイプ 2 の各取引主体の取引によるメリットがどの程度抑えられてしまうか、また、それと対照的に主体 1 と主体 3 のメリットがどの程度向上するかを示している。ある一つのタイプの主体の競争相手が現れた場合、そのタイプの主体が取引から得るレントは抑制されるが、他の主体が得るレントを増大させることはないのである。

さらに第 4 節では、基本的トランスファー・モデルに取引主体 2 の競争相手に加えて取引主体 3 の競争相手も導入して、より競争的なモデルを分析した。三人の主体のうち二人それぞれに競争相手が一人いるこのモデルでは、競争がさらに増して、特定の主体が取引から大きなレントを得ることは難しくなる。

現在、我々は基本的トランスファー・モデルの三人の主体それぞれに一人ずつの競争相手を導入したモデルを分析中である。このモデルでは三人の各主体について競争相手が存在し、ヴィクセル型三角形が示すトランスファーのネットワークは一挙に八通りに増えることになる。この結果トランスファーを行うネットワーク間での実質的競争が生まれ、コア・ト

ランスファーで示される競争が生むトランスファーの結果を、大幅に限定できることが予想される。

参考文献

[1] Debreu, Gerard, and Herbert Scarf (1963), "A Limit Theorem on the Core of an Economy," *International Economic Review* 4, 235–246.

[2] Fujiki, Hiroshi, Edward J. Green, and Akira Yamazaki (2008), "Incentive Efficient Risk Sharing in a Settlement Mechanism," *Journal of Economic Theory* 142, 178–185.

[3] Green, Jerry R. (1972), "On the Inequitable Nature of Core Allocations," *Journal of Economic Theory*, 132–143.

[4] Kiyotaki, Nobuhiro, and Randall Wright (1989), "On Money as a Medium of Exchange," *Journal of Political Economy* 97, 927–954.

Meisei University
Graduate School of Economics and School of Economics
Discussion Paper Series

1. Hashimoto, H. and H. Kataoka, “The Constant Hamiltonian and a Generalized Form of the Ramsey Rule,” December 2006.

2. Greenberg, J., S. Weber, and A. Yamazaki, “On Blocking Coalitions: Linking Mas-Colell with Grodal-Schmeidler-Vind,” December, 2006.

3. Fujiki, H., E. J. Green, and A. Yamazaki, “Incentive Efficient Risk Sharing in Settlement Mechanism,” January, 2007.

4. 井坂直人・吉川浩史,「売買単位の変更と株式収益率」, 2007 年 1 月.

5. Isaka, N., “On the Informational Effect of Short-sales Constraints: Evidence from the Tokyo Stock Exchange,” January, 2007.

6. 上原秀樹,「東アジア諸国の経済発展と環境問題」, 2007 年 10 月.

7. 上原秀樹・片岡晴雄・佐藤正市・中田勇人,「タイ王国の経済発展と貿易・投資の動向に関する研究」, 2007 年 11 月.

8. Hashimoto, H. and H. Kataoka, “Keynes-Ramsey Rule and its Implications in a Two-Sector Optimal Growth Model,” January, 2008.

9. 市石達郎・山崎昭,「経済の情報構造の表現についてーベイジアン・アプローチと状態空間アプローチー」, 2008 年 1 月.

10. Isaka, N., and H. Yoshikawa, “The Effect of Reductions in Minimum Trading Units on Equity Premiums,” January, 2008.

11. Hosoya, Y., and T. Terasaka, “Inference on Transformed Stationary Time Series,” February, 2008.

12. Kajitani, S., “Health and Work Decisions of Older Japanese Men,” March, 2009.

13. Kajitani, S., S. Nishimura, and K. Tokunaga, “The Impact of Healthcare Expenditures on Longevity in Japan: Evidence from Longitudinal, Prefectural-Level Data,” March, 2009.

14. 徳永敬助・西村周三・梶谷真也，「都道府県別にみた介護費の動向」，2009 年 3 月.

15. Kajitani, S., S. Nishimura, and K. Tokunaga, “Why Do the Japanese Enjoy Longevity? Do Health Care Expenditures Contribute it? (Revised Version: The Impact of Healthcare Expenditures on Longevity in Japan: Evidence from Longitudinal, Prefectural-Level Data [No. 13]),” August, 2009.

16. Kajitani, S., “Working in Old Age and Health Outcome in Japan,” March, 2010.

17. 山崎昭,「経済分析の歴史における経済数量の認識と表現形式について―Debreu コンジェクチャーの視点から―」，2010 年 3 月.

18. Yamazaki, A., “On the Perception and Representation of Economic Quantity in the History of Economic Analysis in view of the Debreu Conjecture,” October, 2010.

19. 梶谷真也，「高齢者の職歴と健康状態」，2011 年 3 月.

20. 中田勇人，「資本市場の国際統合と経済厚生」，2011 年 6 月.

21. 星野良明・石川竜一郎・山崎昭，「ヴィクセル型取引ネットワークにおけるエッジワース競争の分析」，2012 年 3 月.